



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Οκτωβρίου 2013

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} .$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} = 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{16}{9} \cdot 8 - \frac{74}{9} \\ &= 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{128}{9} - \frac{74}{9} = 94 + \frac{54}{9} = 94 + 6 = 100. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσόν χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:

(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.

(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.

(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

Λύση

(α) Μετά την αγορά τροφίμων έμειναν στον οικογενειάρχη 1360 ευρώ. Αυτά τα χρήματα αποτελούν το 85% των χρημάτων που του έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή. Άρα το 85% αντιστοιχεί σε ποσόν 1360 ευρώ, οπότε το ποσόν που του έμεινε μετά την αγορά του υπολογιστή είναι

$$1360 \cdot \frac{100}{85} = \frac{16 \cdot 100}{1} = 1600 \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

το $(100 - 20)\% = 80\%$ του ποσού που πήρε αντιστοιχούν σε 1600 ευρώ.

Άρα τα χρήματα που πήρε από την τράπεζα είναι:

$$1600 \cdot \frac{100}{80} = 2000 \text{ ευρώ.}$$

(β) Τα τρόφιμα στοίχισαν το 15% των χρημάτων που έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή, δηλαδή

$$1600 \cdot \frac{15}{100} = 240 \text{ ευρώ.}$$

Το ποσό αυτό μπορεί να βρεθεί και με την αφαίρεση: $1600 - 1360 = 240$.

(γ) Ο οικογενειάρχης από τα 2000 ευρώ που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε

$2000 - 1360 = 640$ ευρώ, δηλαδή ποσοστιαία επί τις εκατό

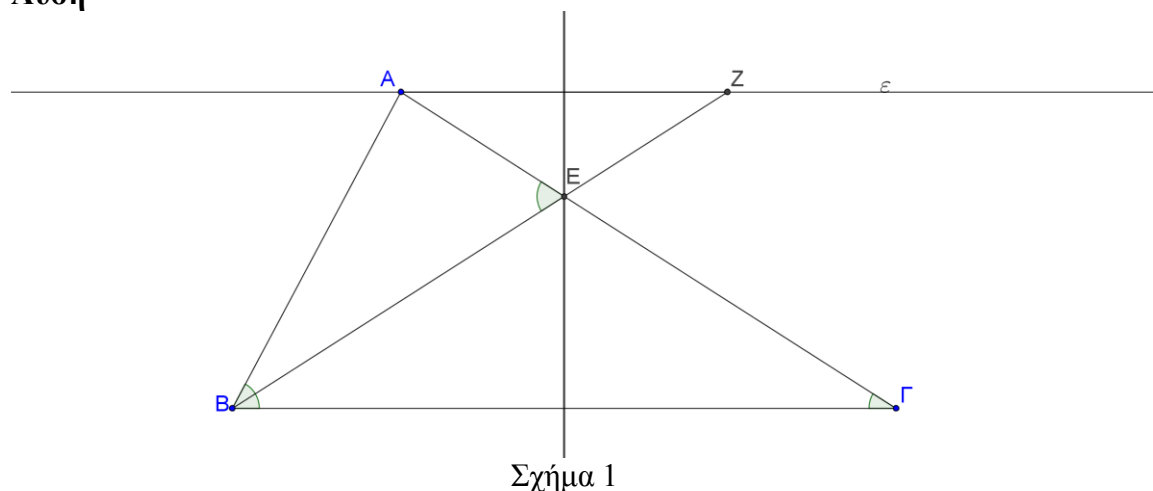
$$\frac{640}{2000} \cdot 100 = \frac{64}{2} = 32.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η γωνία $\hat{B}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AG στο σημείο E και η ευθεία BE τέμνει την ευθεία ε , που περνάει από το σημείο A και είναι παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$, στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

(α) $AZ = AB$, (β) $\hat{AEB} = \hat{B}$.

Λύση



(α) Επειδή το σημείο E ανήκει στη μεσοκάθετη της $B\Gamma$ έπεται ότι $EB = E\Gamma$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο $EB\Gamma$ προκύπτει $\hat{EB\Gamma} = \hat{\Gamma}$. Επειδή $AZ \parallel B\Gamma$ έπεται ότι: $\hat{EB\Gamma} = \hat{AZB}$ (εντός εναλλάξ γωνίες). Από τη σχέση της υπόθεσης $\hat{B} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$, έχουμε:

$$\hat{AZB} = \hat{EB\Gamma} = \hat{\Gamma} = \frac{\hat{B}}{2} = \hat{ABZ}.$$

Άρα το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές με $AB = AZ$.

(β) Η γωνία $\hat{AEB}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $EB\Gamma$, οπότε

$$\hat{AEB} = \hat{EB\Gamma} + \hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{\Gamma} = \hat{B}.$$

Πρόβλημα 4

Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το

18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του

υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω α, β οι δυο φυσικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, Τότε θα είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5}$ και επιπλέον

$$\alpha = 18 \cdot 8 + 5\nu \text{ και } \beta = 12 \cdot 9 + \nu.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 5\alpha = 7\beta \text{ (ιδιότητα ίσων κλασμάτων)}, \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$5 \cdot (144 + 5\nu) = 7 \cdot (108 + \nu) \Leftrightarrow \text{(από επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$720 + 25\nu = 756 + 7\nu \Leftrightarrow 18\nu = 36 \Leftrightarrow \nu = 2, \text{ οπότε θα είναι } \alpha = 154 \text{ και } \beta = 110.$$

2^{ος} τρόπος.

Έχουμε: $\alpha = 18 \cdot 8 + \nu_1$, με $\nu_1 = 0, 1, 2, \dots, 17$ και $\beta = 12 \cdot 9 + \nu_2$, με $\nu_2 = 0, 1, 2, \dots, 11$.

Τα ζεύγη για τα οποία μπορεί να ισχύει η ισότητα $\nu_1 = 5\nu_2$ είναι τα :

$$(\nu_1, \nu_2) = \{(0,0), (5,1), (10,2), (15,3)\}$$

και από αυτά μόνο το ζεύγος $(10,2)$ μας δίνει $\alpha = 154$ και $\beta = 110$ και το κλάσμα

$$\frac{154}{110} \text{ που είναι ισοδύναμο με το } \frac{7}{5}.$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 3 \cdot (3\alpha - 4,6) - 2 \cdot (\alpha - 0,2).$$

Λύση

Έχουμε: $4 < 5$, οπότε $\sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5}$. Είναι

$2,1^2 = 4,41, 2,2^2 = 4,84$ και $2,3^2 = 5,29$, οπότε η ζητούμενη τιμή του α είναι $\alpha = 2,2$.

Με αντικατάσταση βρίσκουμε: $A = 2$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta}.$$

Λύση

Έχουμε $-4 < 1 - 2\beta < 5 \Leftrightarrow -5 < -2\beta < 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{2} < \frac{-2\beta}{-2} < \frac{-5}{-2} \Leftrightarrow -2 < \beta < \frac{5}{2}$. Επειδή ο

β είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\beta = 1$ ή $\beta = 2$.

- Για $\beta = 1$ η ανίσωση γίνεται: $2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < x \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} < x \Leftrightarrow x > 1$.
- Για $\beta = 2$ η ανίσωση γίνεται:
 $2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} < \frac{x}{2} \Leftrightarrow 0 \cdot x < -1$, η οποία είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\chi O \psi$ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi' \chi$ γωνία 45° και επίσης διέρχεται από το σημείο $M(2, -6)$. Το σημείο A ανήκει στον άξονα $\chi' \chi$ και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο B ανήκει στον άξονα $\psi' \psi$ και στην ευθεία (ε).

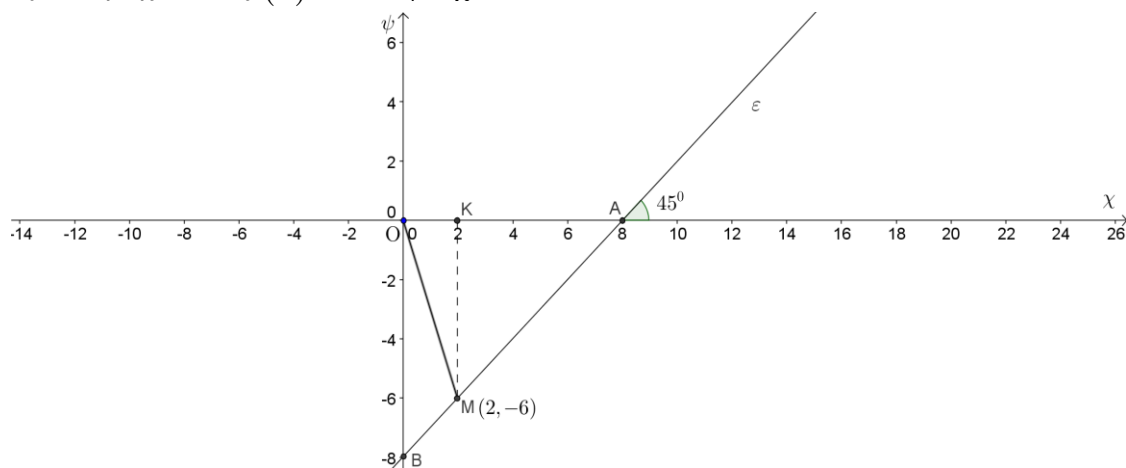
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B και το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAM.

Λύση

α) Η ζητούμενη εξίσωση έχει τη μορφή $\psi = \alpha\chi + \beta$, όπου $\alpha = \tan 45^\circ = 1$. Επειδή η ευθεία περνάει από το σημείο $M(2, -6)$ έχουμε ότι $-6 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -8$. Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $\psi = \chi - 8$



Σχήμα 2

β) Τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) με τους άξονες $\chi' \chi$ και $\psi' \psi$ είναι τα $A(8, 0)$ και $B(0, -8)$, αντίστοιχα. Άρα έχουμε

$$(OAB) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

γ) Αν K είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2, 0)$, τότε το τρίγωνο KMA είναι ορθογώνιο στο K και οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκη $KM = 6$ και $KA = 6$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε

$$AM = \sqrt{KM^2 + KA^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Ομοίως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAB λαμβάνουμε:

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}.$$

Επειδή τα τρίγωνα OAM και OAB έχουν κοινό ύψος από την κορυφή O, έστω $υ$, έχουμε:

$$\frac{(OAM)}{(OAB)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AM \cdot \nu}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot \nu} = \frac{AM}{AB} = \frac{6\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$(OAM) = \frac{3}{4}(OAB) = \frac{3}{4} \cdot 32 = 24 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

Παρατήρηση

Το εμβαδό του τριγώνου OAM μπορεί να υπολογιστεί παρατηρώντας ότι το KM είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά OA (του τριγώνου OAM).

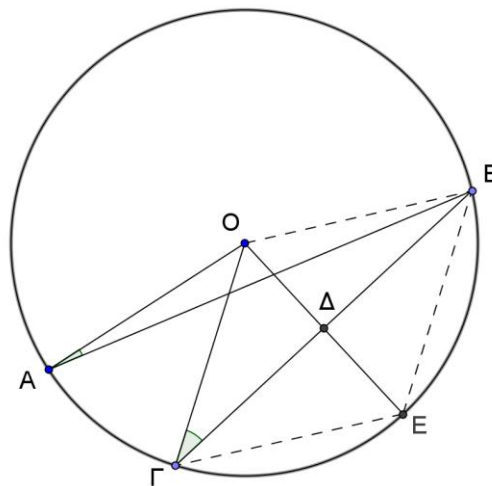
$$\text{Οπότε: } (OAM) = \frac{1}{2} KM \cdot OA = \frac{1}{2} 6 \cdot 8 = 24.$$

4. Σε κύκλο $c(O, R)$ (κέντρου O και ακτίνας R) δίνονται σημεία A , Γ και B τέτοια ώστε $\widehat{OAB} = 10^\circ$ και $\widehat{O\Gamma B} = 30^\circ$. Τα σημεία A και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία OB . Από το σημείο O φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓB που την τέμνει στο σημείο Δ , ενώ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο E .

(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\Gamma B}$ και το μέτρο του τόξου $\widehat{A\Gamma}$ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $OBE\Gamma$ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Επειδή το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές ($OA = OB = R$), έπεται ότι:

$$\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 10^\circ.$$

Επειδή το τρίγωνο $O\Gamma B$ είναι ισοσκελές ($O\Gamma = OB = R$), έπεται ότι:

$$\widehat{O\Gamma B} = \widehat{OB\Gamma} = 30^\circ.$$

Άρα έχουμε: $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{OB\Gamma} - \widehat{OBA} = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$ και $\widehat{A\Gamma} = 40^\circ$.

(β) Το ύψος του τριγώνου $O\Gamma B$ είναι και διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{GOB}$, οπότε $\widehat{GO\Delta} = 90^\circ - \widehat{O\Gamma\Delta} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, οπότε θα είναι και $\widehat{GOE} = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο $O\Gamma E$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\Gamma E = O\Gamma = R$. Επειδή η ευθεία OE είναι

μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ θα είναι $EB = GE = R$, οπότε το τετράπλευρο OBEΓ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες, δηλαδή είναι ρόμβος.

Επιπλέον, έχουμε $OD = OG \cdot \eta\mu 30^\circ = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$, και $GD = OG \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ οπότε

$$(OBE\Gamma) = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Παρατήρηση

Ο ρόμβος OBEΓ, αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς R που το κάθε ένα από αυτά (τα τρίγωνα) έχει εμβαδό $\frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$. Άρα το εμβαδό του ρόμβου θα είναι:

$$(OBE\Gamma) = 2 \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ και } (\Sigma_2) \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + \beta y = 4 \\ 2\alpha x + 3\beta y = -8 \end{array} \right\}$$

έχουν την ίδια λύση (x, y) , να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β .

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{x} = \varphi$ και $\frac{1}{y} = \omega$, το σύστημα (Σ_1) γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi + \omega = \frac{1}{4} \\ 3\varphi + 4\omega = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ 3\left(\frac{1}{4} - \omega\right) + 4\omega = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2} \\ \omega = -\frac{1}{4} \end{array} \right\},$$

οπότε το σύστημα (Σ_1) έχει τη λύση: $(x, y) = \left(\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\omega}\right) = (2, -4)$.

Όμως από την υπόθεση την ίδια λύση έχει και το σύστημα (Σ_2) , οπότε θα έχουμε;

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha - 4\beta = 4 \\ 4\alpha - 12\beta = -8 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 2 \\ \alpha - 3\beta = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2\beta = 2 \\ -\beta = -4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 10 \\ \beta = 4 \end{array} \right\}.$$

Πρόβλημα 2

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει ότι:

$$z = 2(x + y) \quad \text{και} \quad z = 3(x - y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y < x < z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα (x, y, z) για την οποία: $x^2 + y^2 + z^2 = 680$.

Λύση

(α) Επειδή $z = 3(x - y) > 0 \Rightarrow x - y > 0$, έπεται ότι $x > y$.

Επίσης από τις δεδομένες ισότητες έχουμε:

$$z = 2(x + y) = 3(x - y) \Leftrightarrow 2x + 2y = 3x - 3y \Leftrightarrow x = 5y,$$

οπότε προκύπτει: $z = 2x + 2y = 12y$, οπότε $z - x = 12y - 5y = 7y > 0$, οπότε $z > x$.

Άρα έχουμε: $z > x > y \Leftrightarrow y < x < z$.

(β) Από τις προηγούμενες σχέσεις, δεδομένου ότι είναι $y > 0$, έχουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 680 \Leftrightarrow 25y^2 + y^2 + 144y^2 = 680 \Leftrightarrow 170y^2 = 680 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2.$$

Άρα είναι: $(x, y, z) = (10, 2, 24)$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A = 8x + 1$ και $B = 2x - 3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

Λύση

Έστω $A = 8x + 1 = \alpha^2$ και $B = 2x - 3 = \beta^2$. Τότε λαμβάνουμε ότι:

$$x = \frac{\alpha^2 - 1}{8} = \frac{\beta^2 + 3}{2} \quad (1)$$

και

$$\alpha^2 - 4\beta^2 = 13. \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

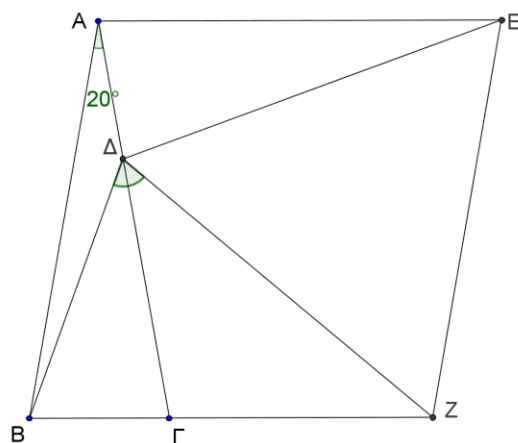
$$\begin{aligned} \alpha^2 - 4\beta^2 = 13 &\Leftrightarrow (\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) = 13 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = 13 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = -13 \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha - 2\beta = 13 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = -1 \\ \alpha - 2\beta = -13 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (7, 3) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (-7, -3) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (7, -3) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (-7, 3). \end{aligned}$$

Από όλα τα παραπάνω ζεύγη, από τις σχέσεις (1), προκύπτει ότι: $x = 6$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 20^\circ$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$. Από το σημείο A φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα AE τέτοιο ώστε $AE \parallel B\Gamma$, $AE = AB$ και με τα σημεία E και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία AB . Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $BAEZ$. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $B\hat{\Delta}Z$.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή είναι $\hat{A} = 20^\circ$ και $AE \parallel B\Gamma$ έχουμε ότι:

$$\hat{E\Delta\Lambda} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta\Lambda$ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($AB = EA$, $B\Gamma = A\Delta$) και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες ($\hat{A\hat{B}\Gamma} = \hat{E\hat{\Lambda}\Delta} = 80^\circ$).

Επομένως, έχουμε: $E\Delta = A\Gamma = AB$, $\hat{A\hat{E}\Delta} = 20^\circ$.

Επειδή το παραλληλόγραμμο $BAEZ$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ($AE = AB$), είναι ρόμβος, οπότε $EZ = AB = E\Delta$, δηλαδή το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισοσκελές. Επιπλέον, ισχύει: $\hat{A\hat{E}Z} = \hat{B} = 80^\circ$. Επομένως $\hat{\Delta\hat{E}Z} = \hat{A\hat{E}Z} - \hat{A\hat{E}\Delta} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $E\Delta Z$ είναι ισόπλευρο.

Τότε είναι: $\hat{B\hat{Z}\Delta} = \hat{B\hat{Z}E} - \hat{\Delta\hat{Z}E} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο

$BZ\Delta$ ($ZB = AB = Z\Delta$) προκύπτει ότι: $\hat{B\hat{\Delta}Z} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 + 3x + 1}{x} - \frac{27x}{9x^2 + 3x + 1} \geq 6.$$

Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή είναι $x > 0$ θα είναι και $9x^2 + 3x + 1 > 0$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}
& (9x^2 + 3x + 1)^2 - 27x^2 \geq 6x(9x^2 + 3x + 1) \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 3x + 1)^2 - 6x(9x^2 + 3x + 1) - 27x^2 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) - 27x^2 \geq 0. \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 1)^2 - 9x^2 - 27x^2 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (9x^2 + 1)^2 - 36x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (9x^2 - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}
\end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, αφού $x > 0$.

Πρόβλημα 2

Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α, β, γ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = \beta$.

Λύση

Αφού οι αριθμοί 1 και β είναι ρίζες της εξίσωσης, έχουμε:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad (1)$$

$$\alpha\beta^2 + \beta^2 + \gamma = 0. \quad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\alpha(\beta^2 - 1) + \beta(\beta - 1) = 0 \Leftrightarrow (\beta - 1)(\alpha\beta + \alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ ή } \alpha\beta + \alpha + \beta = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι είναι $\beta = 1$, τότε $\alpha + \gamma = -1$ και $\alpha + \gamma = 0$, αδύνατο.

Άρα είναι $\beta \neq 1$, οπότε θα είναι:

$$\alpha\beta + \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\beta}{\beta + 1} = -1 + \frac{1}{\beta + 1}.$$

Επειδή $\alpha \in \mathbb{Z}$ πρέπει: $\frac{1}{\beta + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \beta \in \{-2, 0\}$. Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\beta = 0$, οπότε έχουμε: $\alpha + \gamma = 0$ και $\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0$, το οποίο απορρίπτεται αφού από την υπόθεση έχουμε $\alpha \neq 0$.
- $\beta = -2$, οπότε έχουμε $\alpha + \gamma = 2$ και $4\alpha + \gamma = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2, \gamma = 4$. Επομένως προκύπτει η τριάδα συντελεστών $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, -2, 4)$.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2}$$

είναι θετικός ακέραιος.

Λύση

Θέλουμε να βρούμε για ποιους θετικούς ακέραιους λ έχει λύση ως προς x η εξίσωση

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2} = \lambda \Leftrightarrow (2 - \lambda)x^2 + (1 + \lambda)x - 2(2 + \lambda) = 0.$$

Αν $\lambda = 2$ προκύπτει από την εξίσωση η λύση $x = \frac{8}{3}$.

Αν $\lambda \neq 2$, τότε η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει λύση ως προς x , αν, και μόνον αν, η διακρίνουσά της είναι μη αρνητική. Έχουμε

$$\Delta = (\lambda + 1)^2 + 8(4 - \lambda^2) = -7\lambda^2 + 2\lambda + 33 = (-\lambda^2 + 2\lambda) + (33 - 6\lambda^2),$$

Παρατηρούμε ότι για $\lambda \geq 3$ και οι δύο παρενθέσεις είναι αρνητικές, οπότε $\Delta < 0$. Επομένως, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, διάφορος του 2, έπεται ότι: $\lambda = 1$. Τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{7}$.

Άρα για $x = \frac{8}{3}$ το κλάσμα παίρνει την ακέραια τιμή 2 και για $x = -1 \pm \sqrt{7}$ παίρνει την ακέραια τιμή 1.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O, R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $C_B(B, AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και τον κύκλο $C(O, R)$ στο σημείο A . Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την AB στο σημείο M και τον κύκλο $C(O, R)$ στο σημείο N . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία K, A, M, N είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

Έστω T το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων C_A και C_B . Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία T, A, Γ είναι συνευθειακά.

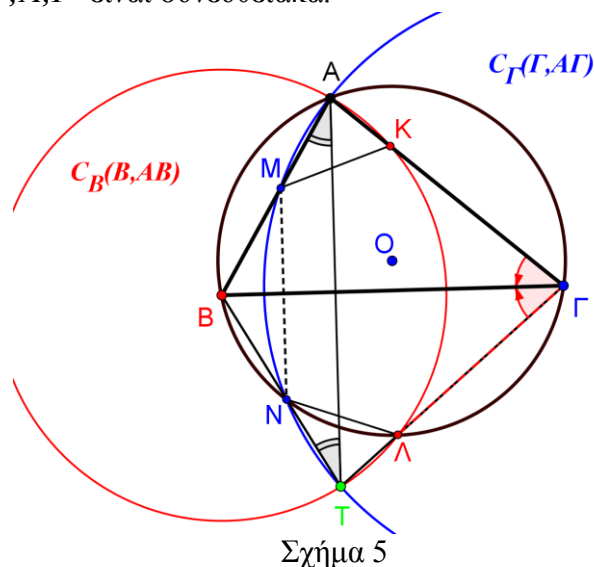
Οι χορδές BA και BA του κύκλου C είναι ίσες μεταξύ τους, διότι είναι ακτίνες του κύκλου C_A , οπότε οι εγγεγραμμένες (στο κύκλο C) γωνίες που βαίνουν στα αντίστοιχα τόξα, θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή

$$\widehat{B\Gamma A} = \widehat{B\hat{\Gamma}A} = \hat{\Gamma} \quad (1).$$

Η $B\Gamma$ είναι διάκεντρος των κύκλων C_B και C_Γ , οπότε θα είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής AT και θα διχοτομεί τη γωνία $A\hat{\Gamma}T$, δηλαδή

$$\widehat{B\hat{\Gamma}A} = \widehat{B\hat{\Gamma}T} = \hat{\Gamma} \quad (2).$$

Άρα τα σημεία T, A, Γ είναι συνευθειακά.



Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία T, N, B είναι συνευθειακά.

Το τρίγωνο BAT είναι ισοσκελές ($BA=BT$). Άρα $\hat{MAT}=\hat{NTA}$, οπότε τα αντίστοιχα τόξα AN και MT (του κύκλου C_F) είναι ίσα μεταξύ τους.

Από την ισότητα των τόξων $AN=AM+MN$ και $MT=TN+MN$, προκύπτει η ισότητα των τόξων AM και TN . Άρα το τετράπλευρο $MATN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $MN \parallel AT$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο $KAT\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $K\Lambda \parallel AT$. Άρα $MN \parallel K\Lambda$ και κατά συνέπεια το $MKAN$ είναι τραπέζιο και η $B\Gamma$ είναι κοινή μεσοκάθετη των παράλληλων πλευρών του.

Τα τρίγωνα AKM και $T\Lambda N$ είναι ίσα. Άρα το $MKAN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$2x^2 - 5x - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1.$$

Λύση

Περιορισμός: $x^2 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 5$. Η εξίσωση, για $x \leq 0$ ή $x \geq 5$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 + (x^2 - 5x) - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow (x - \sqrt{x^2 - 5x})^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \quad (E_1) \quad \text{ή} \quad x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \quad (E_2)$$

$$\bullet \quad (E_1): x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty), x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5x, \text{ με } x \geq 5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}, x \geq 5, \text{ απορρίπτεται.}$$

$$\bullet \quad (E_2): x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty), x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 5x, \text{ με } -1 \leq x \leq 0 \text{ ή } x \geq 5$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}, -1 \leq x \leq 0 \text{ ή } x \geq 5 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}.$$

Πρόβλημα 2

Αν α, β ακέραιοι και ο αριθμός $A = \alpha^2 + 2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = \alpha^2 + \beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Λύση

Έστω ότι $A = \alpha^2 + 2\beta = x^2$, όπου $x \in \mathbb{Z}$. Τότε $\beta = \frac{x^2 - \alpha^2}{2}$. Επειδή $\beta \in \mathbb{Z}$, πρέπει ο

αριθμητής $x^2 - \alpha^2$ να είναι άρτιος ακέραιος, το οποίο συμβαίνει μόνον όταν οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Έτσι έχουμε

$$\alpha^2 + \beta = \alpha^2 + \frac{x^2 - \alpha^2}{2} = \frac{x^2 + \alpha^2}{2} = \frac{(x+\alpha)^2 + (x-\alpha)^2}{4} = \left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2,$$

όπου οι αριθμοί $\frac{x+\alpha}{2}$ και $\frac{x-\alpha}{2}$ είναι ακέραιοι, αφού οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Πρόβλημα 3

Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a η εξίσωση

$$4x^4 + (8+4a)x^3 + (a^2+8a+4)x^2 + (a^3+8)x + a^2 = 0$$

έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} & 4x^4 + (8+4a)x^3 + (a^2+8a+4)x^2 + (a^3+8)x + a^2 \\ &= (4x^4 + 8x^3 + a^2x^2) + (4ax^3 + 8ax^2 + a^3x) + (4x^2 + 8x + a^2) \\ &= x^2(4x^2 + 8x + a^2) + ax(4x^2 + 8x + a^2) + (4x^2 + 8x + a^2) \\ &= (4x^2 + 8x + a^2)(x^2 + ax + 1). \end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς, αν, και μόνον αν, και τα δύο τριώνυμα $x^2 + ax + 1$ και $4x^2 + 8x + a^2$ έχουν πραγματικές ρίζες

$$\Leftrightarrow a^2 - 4 \geq 0 \quad \text{και} \quad 64 - 16a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 \geq 0 \quad \text{και} \quad a^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = -2 \text{ ή } a = 2.$$

Πρόβλημα 4

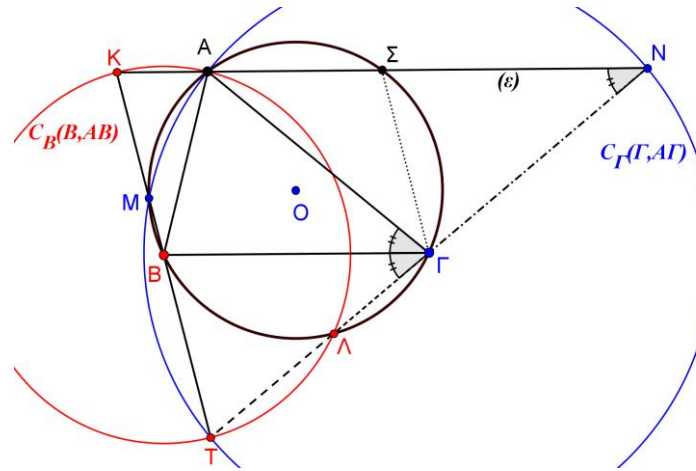
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στη πλευρά $B\Gamma$. Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την (ε) στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ . Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την (ε) στο σημείο N και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο M . Οι κύκλοι $C_B(B,AB)$, $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$ τέμνονται στο σημείο T και η (ε) τέμνει τον $C(O,R)$ στο σημείο Σ .

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Λ, N, T είναι συνευθειακά.

(β) Να αποδείξετε ότι οι $T\Sigma, K\Gamma, NB$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΓAN είναι ισοσκελές ($\Gamma A = \Gamma N$ ως ακτίνες του κύκλου C_Γ). Άρα $\hat{A}\hat{N}\hat{\Gamma} = \hat{N}\hat{A}\hat{\Gamma}$.



Σχήμα 6

Από την παραλληλία $(\varepsilon) \parallel B\Gamma$ (με τέμνουσα την $A\Gamma$) έχουμε: $\hat{N}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από τις προηγούμενες ισότητες γωνιών, προκύπτει: $\hat{A}\hat{N}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$ (1).

Από την ισότητα των χορδών AB και BA του κύκλου $C(O, R)$ (οι χορδές AB και BA είναι ακτίνες του κύκλου C_B) έχουμε: $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda} = \hat{\Gamma}$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\hat{A}\hat{N}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda} = \hat{\Gamma}$, δηλαδή τα σημεία Γ, N, Λ είναι συνευθειακά.

Η διάκεντρος $B\Gamma$ (των κύκλων C_B και C_Γ) είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους AT . Άρα $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{T} = \hat{\Gamma}$. Από την ισότητα των γωνιών $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{T}$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda}$, προκύπτει ότι τα σημεία Γ, T, Λ είναι συνευθειακά, οπότε σε συνδυασμό με το προηγούμενο συμπέρασμα έπεται ότι τα σημεία Γ, Λ, N, T είναι συνευθειακά.

(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία B, K, M, T είναι συνευθειακά, οπότε τα σημεία B και Γ είναι μέσα των πλευρών TK και TN , αντίστοιχα, του τριγώνου TKN .

Θα αποδείξουμε ότι το σημείο Σ είναι το μέσο της πλευράς KN (οπότε οι $T\Sigma, K\Gamma, NB$ θα συντρέχουν στο βαρύκεντρο του τριγώνου TKN).

Πράγματι, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Sigma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο εγγεγραμμένο στον κύκλο $C(O, R)$, οπότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\hat{\Gamma}\hat{\Sigma}\hat{N} = \hat{K}\hat{A}\hat{B} \text{ (από το ισοσκελές τραπέζιο } AB\Gamma\Sigma \text{)}$$

$$\hat{K}\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{K}\hat{A} \text{ (από το ισοσκελές τρίγωνο } ABK \text{)}.$$

Άρα η $\Sigma\Gamma$ είναι παράλληλη προς την KB , δηλαδή το Σ είναι το μέσο της KN .

Παρατήρηση

Δεν είναι απαραίτητο (για την απόδειξη του δευτέρου ερωτήματος) να αποδείξουμε ότι το σημείο Λ ανήκει στην ίδια ευθεία με τα σημεία Γ, N, T .

Χρειάζεται όμως για να αποδείξουμε ότι και $AT, NM, K\Lambda$ συντρέχουν και να συμπεράνουμε ότι τα σημεία ο κύκλος $C(O, R)$ είναι ο κύκλος Euler του τριγώνου TKN .



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
1 Νοεμβρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8 = \frac{13}{9} - \frac{74 \cdot 3}{9 \cdot 37} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 : 8 \\ &= \frac{13}{9} - \frac{2}{3} + \frac{16}{9} : 8 = \frac{13}{9} - \frac{2}{3} + \frac{16 : 8}{9} = \frac{13}{9} - \frac{6}{9} + \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α και Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε x ευρώ το ραδιόφωνο Α. Τότε η τιμή αγοράς του ραδιοφώνου Β ήταν $200 - x$ ευρώ. Τότε το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε $x + \frac{25x}{100} = \frac{125x}{100}$

ευρώ, ενώ το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε $(200 - x) \cdot \frac{150}{100}$ ευρώ. Συνολικά τα δύο

ραδιόφωνα πουλήθηκαν $200 \cdot \frac{140}{100}$ ευρώ, δηλαδή 280 ευρώ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{125x}{100} + (200 - x) \cdot \frac{150}{100} &= 200 \cdot \frac{140}{100} \Leftrightarrow 12,5x - 15x + 3000 = 2800 \\ &\Leftrightarrow 2,5x = 200 \Leftrightarrow x = 80. \end{aligned}$$

Άρα ο έμπορος αγόρασε 80 ευρώ το ραδιόφωνο Α και $200 - 80 = 120$ ευρώ το ραδιόφωνο Β.

Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δεδομένα κλάσματα την ίδια διαφορά:

$$(\text{Παρανομαστής}) - (\text{Αριθμητής}) = 1012.$$

Έτσι γράφουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1003}{2015} &= 1 - \frac{1012}{2015}, \quad \frac{1007}{2019} = 1 - \frac{1012}{2019}, \quad \frac{1009}{2021} = 1 - \frac{1012}{2021}, \quad \frac{997}{2009} = 1 - \frac{1012}{2009} \\ \frac{1011}{2023} &= 1 - \frac{1012}{2023}, \quad \frac{999}{2011} = 1 - \frac{1012}{2011}, \quad \frac{1001}{2013} = 1 - \frac{1012}{2013}, \quad \frac{1005}{2017} = 1 - \frac{1012}{2017} \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ ρητών αριθμών με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο παρανομαστή, οπότε έχουμε:

$$\frac{1012}{2009} > \frac{1012}{2011} > \frac{1012}{2013} > \frac{1012}{2015} > \frac{1012}{2017} > \frac{1012}{2019} > \frac{1012}{2021} > \frac{1012}{2023}$$

Άρα έχουμε:

$$1 - \frac{1012}{2009} < 1 - \frac{1012}{2011} < 1 - \frac{1012}{2013} < 1 - \frac{1012}{2015} < 1 - \frac{1012}{2017} < 1 - \frac{1012}{2019} < 1 - \frac{1012}{2021} < 1 - \frac{1012}{2023},$$

οπότε ο αριθμός $\frac{1011}{2023}$ είναι ο μεγαλύτερος από τους δεδομένους ρητούς αριθμούς,

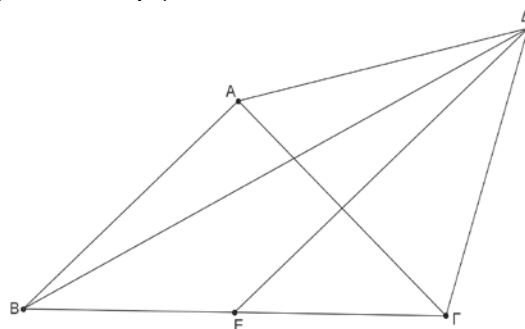
ενώ ο $\frac{997}{2009}$ είναι ο μικρότερος.

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = AG$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

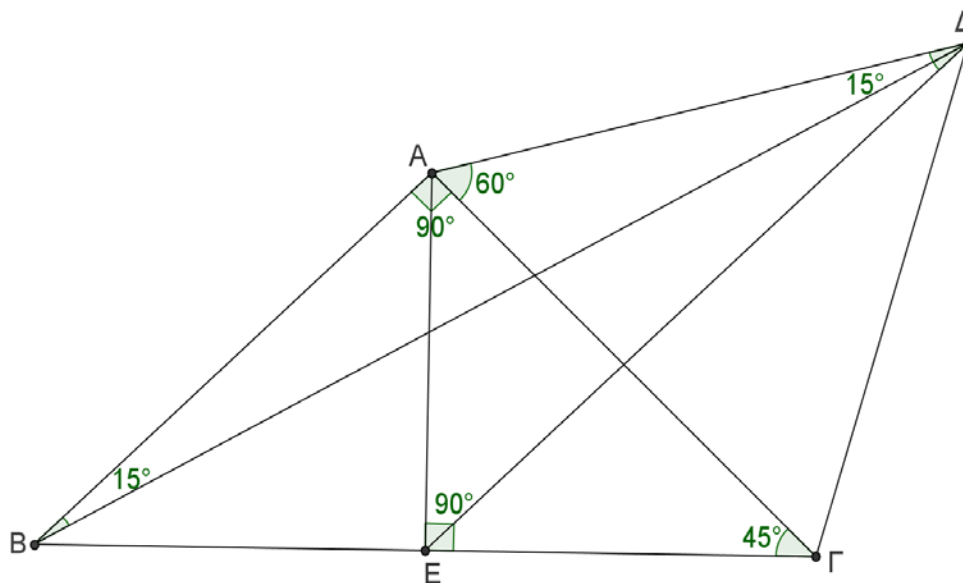
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{A}E$.



Σχήμα 1

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ και η διάμεσός του AE είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο AEG είναι ορθογώνιο στο E με μία γωνία του 45° . Επομένως θα έχει $\hat{EAG} = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $EA = EG$.

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε ότι: $\Delta A = \Delta \Gamma$. Επομένως τα σημεία Δ και E ισαπέχουν από τα άκρα A και Γ του ευθύγραμμου τμήματος AG , οπότε η ευθεία DE είναι η μεσοκάθετη του AG .

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ λαμβάνουμε τις ισότητες $AB = A\Gamma = A\Delta$, οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε $\hat{\Delta\Gamma} = 60^\circ$, οπότε $\hat{\Delta AB} = \hat{\Delta\Gamma} + \hat{\Gamma AB} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$. Επειδή $AB\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$\hat{A\Delta B} = \hat{B\Delta A} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Επειδή οι ευθείες AB και DE είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία AG , που τις τέμνει η ευθεία BD , σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$\hat{B\Delta E} = \hat{A\Delta A} = 15^\circ$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13}$, αν $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

Λύση

Έχουμε

$$A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{6}{13},$$

οπότε για $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ λαμβάνουμε:

$$A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3} - \frac{6}{13} = \frac{\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 1}{\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 3} - \frac{6}{13} = \frac{\frac{256}{81} - 1}{\frac{256}{81} - 3} - \frac{6}{13} = \frac{\frac{175}{81}}{\frac{256}{81} - 3} - \frac{6}{13} = \frac{175}{13} - \frac{6}{13} = \frac{169}{13} = 13.$$

2^{ος} τρόπος

Για όσους δεν γνωρίζουν την παραγοντοποίηση της διαφοράς δύο τετραγώνων, προτείνουμε την ακόλουθη λύση:

Έχουμε $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$, οπότε:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left(\frac{16}{9}\right)^4 - 1}{\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2 + 1\right)\left(\left(\frac{16}{9}\right)^2 - 3\right)} - \frac{6}{13} = \frac{\frac{256 \cdot 256 - 81 \cdot 81}{81^2}}{\left(\frac{256 + 81}{81}\right)\left(\frac{256 - 243}{81}\right)} - \frac{6}{13} \\ &= \frac{\frac{65536 - 6561}{81^2}}{\left(\frac{337}{81}\right)\left(\frac{13}{81}\right)} - \frac{6}{13} = \frac{\frac{58975}{81^2}}{\frac{337 \cdot 13}{81^2}} - \frac{6}{13} = \frac{58975}{337 \cdot 13} - \frac{6}{13} = \frac{175}{13} - \frac{6}{13} = \frac{169}{13} = 13. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\frac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Λύση

Έστω n το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου. Τότε το πλήθος των μαθητών που παίζει βιολί είναι $\frac{4n}{100}$. Το πλήθος των μαθητών που παίζει και βιολί και πιάνο είναι

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4n}{100} = \frac{4n}{300} = \frac{n}{75}.$$

Επειδή ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο αριθμητής n να είναι πολλαπλάσιο του παρανομαστή, δηλαδή πρέπει $n = 75k$, όπου k θετικός ακέραιος..

Έτσι, από την υπόθεση $170 \leq n \leq 230$, έχουμε:

$$170 \leq n = 75k \leq 230 \Leftrightarrow \frac{170}{75} \leq k \leq \frac{230}{75} \Leftrightarrow 2 + \frac{20}{75} \leq k \leq 3 + \frac{5}{75} \Leftrightarrow k = 3.$$

Επομένως έχουμε $n = 75 \cdot 3 = 225$ μαθητές.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευρά α . Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma Z = A\Delta$. Αν $E(AB\Delta)$ και $E(AB\Delta Z)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ και του τετραπλεύρου $AB\Delta Z$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)}$.

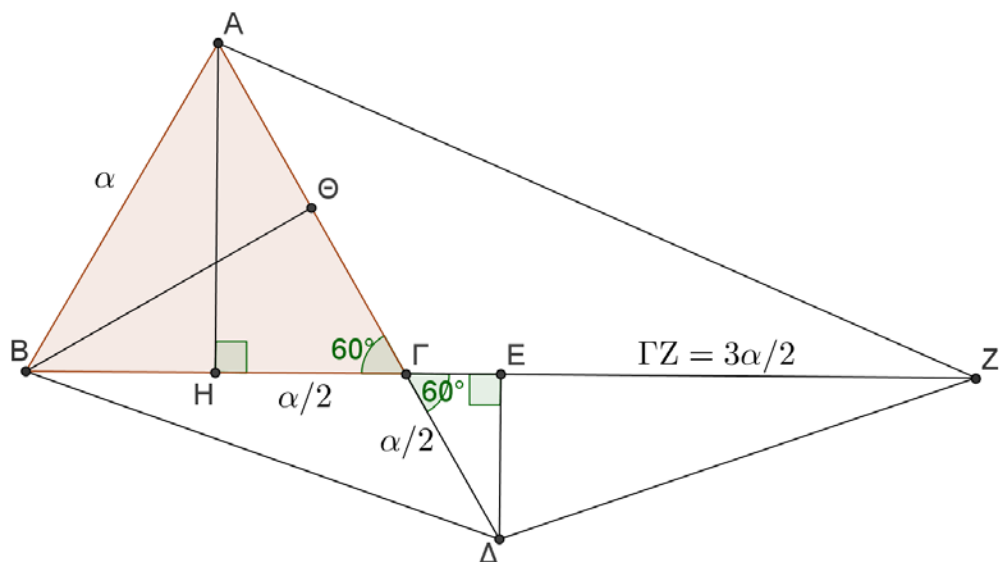
Λύση

Το τρίγωνο $AB\Delta$ έχει βάση $A\Delta = \frac{3\alpha}{2}$ και ύψος

$$B\Theta = AH = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι:

$$E(AB\Delta) = \frac{1}{2} \cdot A\Delta \cdot B\Theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$



Σχήμα 3

Για το τετράπλευρο $AB\Delta Z$ έχουμε: $E(AB\Delta Z) = E(ABZ) + E(B\Delta Z)$.

Στο τρίγωνο ABZ έχουμε βάση $BZ = \alpha + \frac{3\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος $AH = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, οπότε έχει εμβαδό

$$E(ABZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$

Στο τρίγωνο $B\Delta Z$ έχουμε βάση $BZ = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος ΔE το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $AH\Gamma$ και $\Gamma E\Delta$ ως εξής:

$$\frac{E\Delta}{AH} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{E\Delta}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow E\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Διαφορετικά, μπορούμε να έχουμε: $E\Delta = \Gamma\Delta \eta\mu 60^\circ = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$

Άρα έχουμε:

$$E(B\Delta Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}.$$

Επομένως έχουμε:

$$E(AB\Delta Z) = E(ABZ) + E(B\Delta Z) = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8} + \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16} = \frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)} = \frac{\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}}{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}} = \frac{6\sqrt{3}\alpha^2}{15\sqrt{3}\alpha^2} = \frac{2}{5}.$$

2^{ος} τρόπος

Έστω $E(AB\Gamma) = E$. Τότε $E(B\Gamma\Delta) = \frac{E}{2}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος $B\Theta$ με το τρίγωνο $AB\Gamma$

και βάση $\Gamma\Delta = \frac{\alpha}{2}$. Άρα είναι:

$$E(AB\Delta) = E(AB\Gamma) + E(B\Gamma\Delta) = \frac{3E}{2}.$$

Ακόμα έχουμε: $E(A\Gamma Z) = \frac{3E}{2}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος AH με το τρίγωνο $AB\Gamma$ και

βάση $\Gamma Z = \frac{3\alpha}{2}$. Τέλος έχουμε $E(\Gamma\Delta Z) = \frac{3E}{4}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΔE με το

τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ και βάση $\Gamma Z = \frac{3\alpha}{2}$. Έτσι έχουμε:

$$E(AB\Delta Z) = E + \frac{E}{2} + \frac{3E}{2} + \frac{3E}{4} = \frac{15E}{4}$$

και επομένως

$$\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)} = \frac{3E/2}{15E/4} = \frac{2}{5}.$$

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta(\Delta_1)$ και $\beta(\Delta_2)$,

αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι

ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 .

Λύση

Έστω $\alpha(\Delta)$, $\alpha(\Delta_1)$ και $\alpha(\Delta_2)$ η αξία των διαμαντιών Δ, Δ_1 και Δ_2 , αντίστοιχα.

Τότε έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta)}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\alpha(\Delta_1)}{\beta(\Delta_1)^2} = \frac{\alpha(\Delta_2)}{\beta(\Delta_2)^2} = \lambda$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta) = \lambda\beta(\Delta)^2, \alpha(\Delta_1) = \lambda\beta(\Delta_1)^2, \alpha(\Delta_2) = \lambda\beta(\Delta_2)^2$$

Άρα έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\lambda\beta(\Delta_1)^2 + \lambda\beta(\Delta_2)^2}{\lambda\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2 + \beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} \quad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{3} = \frac{\beta(\Delta_2)}{7} = \frac{\beta(\Delta_1) + \beta(\Delta_2)}{3+7} = \frac{\beta(\Delta)}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)} = \frac{3}{10}, \frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)} = \frac{7}{10} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)} = \frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2} + \frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} = \left(\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}\right)^2 + \left(\frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}\right)^2 = \frac{9}{100} + \frac{49}{100} = \frac{58}{100}.$$

Επομένως η αξία των δύο κομματιών του διαμαντιού ισούται με το 58% της αρχικής αξίας του, δηλαδή η αξία του μειώθηκε κατά $100 - 58 = 42\%$.

2^{ος} τρόπος

Επειδή στον πρώτο τρόπο διαπιστώνουμε στη σχέση (1) ότι ο λόγος $\frac{\alpha(\Delta_1) + \alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}$

εξαρτάται από τους λόγους των βαρών $\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}$ και $\frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}$, μπορούμε, χωρίς απώλεια

της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $\beta(\Delta_1) = 3$ και $\beta(\Delta_2) = 7$ με $\beta(\Delta) = 10$.

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η αξία του τετραγώνου της μονάδας βάρους είναι 1, τότε έχουμε ότι $\alpha(\Delta_1) = 3^2 = 9$ και $\alpha(\Delta_2) = 7^2 = 49$ και $\alpha(\Delta) = 10^2 = 100$. Επομένως η μείωση της αξίας του διαμαντιού είναι $100 - (9 + 49) = 42$, δηλαδή σε ποσοστό 42%.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{2015^3 + 2013^3}{2014^2 + 4029^2} + \frac{2016^3 + 2012^3 - 18 \cdot 2014}{2014^2 + 4027^2} - \frac{4 \cdot 2014 \cdot (2014^2 + 3)(5 \cdot 2014^2 + 1)}{(5 \cdot 2014^2 + 1)^2 - (4 \cdot 2014)^2}.$$

Λύση

Επειδή οι εμφανιζόμενες πράξεις είναι πολλές και χρονοβόρες, προσπαθούμε με κατάλληλη αντικατάσταση, να μετασχηματίσουμε την αριθμητική παράσταση σε αλγεβρική. Η παράσταση που προκύπτει μετά την απλοποίησή της οδηγεί τελικά σε απλό υπολογισμό της δεδομένης αριθμητικής παράστασης. Έτσι, αν θέσουμε $x = 2014$, η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x+1)^3 + (x-1)^3}{x^2 + (2x+1)^2} + \frac{(x+2)^3 + (x-2)^3 - 18x}{x^2 + (2x-1)^2} - \frac{4x(x^2+3)(5x^2+1)}{(5x^2+1)^2 - (4x)^2} \\ &= \frac{2x(x^2+3)}{5x^2+4x+1} + \frac{2x(x^2+3)}{5x^2-4x+1} - \frac{4x(x^2+3)(5x^2+1)}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \\ &= 2x(x^2+3) \left[\frac{1}{5x^2+4x+1} + \frac{1}{5x^2-4x+1} - \frac{2(5x^2+1)}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \right] \\ &= 2x(x^2+3) \left(\frac{5x^2-4x+1+5x^2+4x+1-10x^2-2}{(5x^2+4x+1)(5x^2-4x+1)} \right) = 2x(x^2+3) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα είναι

$$A = \frac{2015^3 + 2013^3}{2014^2 + 4029^2} + \frac{2016^3 - 2012^3 - 18 \cdot 2014}{2014^2 + 4027^2} - \frac{4 \cdot 2014 \cdot (2014^2 + 3)(5 \cdot 2014^2 + 1)}{(5 \cdot 2014^2 + 1)^2 - (4 \cdot 2014)^2} = 0$$

Πρόβλημα 2

Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

Λύση

Έστω ότι η τιμή πώλησης του τόμου Α είναι x ευρώ και τόμου Β είναι y ευρώ. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$100x + 120y = 4000 \Leftrightarrow 5x + 6y = 200 \quad (1)$$

$$50 \cdot \frac{90x}{100} + 60 \cdot \frac{80y}{100} = 1680 \Leftrightarrow 45x + 48y = 1680 \quad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 6y = 200 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 45x + 54y = 1800 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6y = 120 \\ 45x + 48y = 1680 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 20 \\ x = \frac{1680 - 48y}{45} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 20 \\ x = 16 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Άρα η τιμή πώλησης του τόμου Α ήταν 16 ευρώ και του τόμου Β ήταν 20 ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = (x^2 + y^2 + xy)^2 \quad \text{και} \quad B = 2 \left[(x^2 + y^2 + 2xy)^2 + x^4 + y^4 \right],$$

όπου x, y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση A ως πολυώνυμο των μεταβλητών x, y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x .

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{B}$ είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y .

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + y^2 + xy)^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 + xy) \\ &= x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 \\ &= x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4. \end{aligned}$$

Διαφορετικά μπορούμε να έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + y^2 + xy)^2 = (x^2 + y^2)^2 + (xy)^2 + 2(x^2 + y^2)xy \\ &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 \\ &= x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, ότι:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + 2xy)^2 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4, \\ B &= 2 \left[(x^2 + y^2 + 2xy)^2 + x^4 + y^4 \right] = 2 \left[x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + x^4 + y^4 \right] \\ &= 2 \left[2x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4 \right] = 4 \left(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 \right) \\ &= 4(x^2 + y^2 + xy)^2, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α)

Άρα έχουμε

$$\sqrt{B} = \left| 2(x^2 + xy + y^2) \right| = 2(x^2 + xy + y^2) \in \mathbb{Q},$$

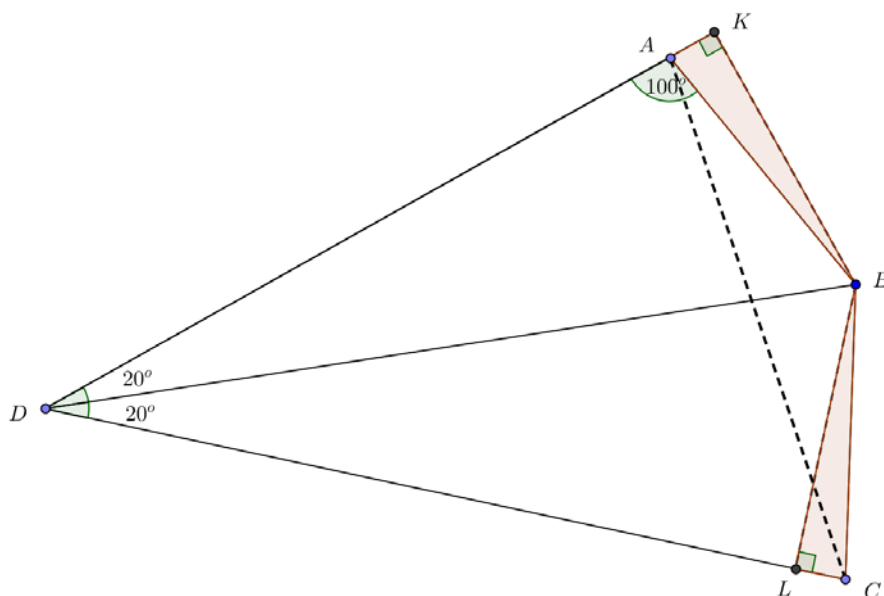
αφού οι αριθμοί x, y είναι ρητοί και $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο $ABCD$ με τη γωνία $\hat{A}=100^\circ$ και $\hat{D}=40^\circ$. Αν DB είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{CDA}$ και $DB=DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $\hat{CAB}$.

Λύση

Εφόσον η DB είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{CDA}$, θα έχουμε ότι $\hat{CDB} = \hat{BDA} = 20^\circ$ και από το ισοσκελές τρίγωνο DBC θα έχουμε ότι $\hat{DBC} = \hat{DCB} = 80^\circ$ και επιπλέον έχουμε ότι $\hat{DBA} = 180^\circ - (100^\circ + 20^\circ) = 60^\circ$. Αν τώρα φέρουμε τις προβολές BK και BL , αφού το B είναι σημείο της διχοτόμου, θα έχουμε ότι $BK = BL$ και $\hat{BAK} = 80^\circ$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα BAK και BLC είναι ίσα, που σημαίνει ότι $BA = BC$. Επομένως, από το ισοσκελές τρίγωνο BAC παίρνουμε ότι: $\hat{CAB} = 20^\circ$.



Σχήμα 4

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$A = \frac{x^k + 1}{x^{k+1} + 1} \text{ και } B = \frac{x^{k+1} + 1}{x^{k+2} + 1}.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Θεωρούμε τη διαφορά των δύο αριθμών και έχουμε:

$$\begin{aligned}
A - B &= \frac{x^k + 1}{x^{k+1} + 1} - \frac{x^{k+1} + 1}{x^{k+2} + 1} = \frac{(x^k + 1)(x^{k+2} + 1) - (x^{k+1} + 1)^2}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)} \\
&= \frac{x^{k+2} + x^k + 1 - 2x^{k+1} - 1}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)} = \frac{x^{k+2} + x^k - 2x^{k+1}}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)} = \frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1} + 1)(x^{k+2} + 1)},
\end{aligned}$$

οπότε, αφού $x > 0$ και k ακέραιος, έχουμε:

$$A - B = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 1 \\ > 0, & \text{αν } 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B, & \text{αν } x = 1 \\ A > B, & \text{αν } 0 < x \neq 1 \end{cases}.$$

2^{ος} τρόπος

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{A}{B} &= \frac{(x^k + 1)(x^{k+2} + 1)}{(x^{k+1} + 1)^2} = \frac{x^{2k+2} + x^k + x^{k+2} + 1}{(x^{k+1} + 1)^2} \\
&= 1 + \frac{x^{k+2} + x^k - 2x^{k+1}}{(x^{k+1} + 1)^2} = 1 + \frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1} + 1)^2} \geq 1.
\end{aligned}$$

Η ισότητα στην τελευταία ισχύει, αν, και μόνο αν, $x = 1$.

Επομένως έχουμε ότι:

$$A = B, \text{ αν } x = 1 \text{ και } A > B, \text{ αν } 0 < x \neq 1.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 + 2|x - y| = 5$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 5 - 2|x - y| \quad (1)$$

Η παράσταση του πρώτου μέλους γράφεται:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 2\left(x^2 - 5xy + \frac{25y^2}{4}\right) + 13y^2 - \frac{25y^2}{2} = 2\left(x - \frac{5y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} \geq 0,$$

όπου η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν: $x - \frac{5y}{2} = y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Επομένως για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1) πρέπει να ισχύει:

$$5 - 2|x - y| \geq 0 \Leftrightarrow |x - y| \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow |x - y| \in \{0, 1, 2\},$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

1. $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$2x^2 - 10x^2 + 13x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε προκύπτουν οι λύσεις: $(x, y) = (-1, -1)$ ή $(x, y) = (1, 1)$.

2. $|x - y| = 1 \Leftrightarrow x - y = 1$ ή $x - y = -1 \Leftrightarrow x = y + 1$ ή $x = y - 1$.

Για $x = y \pm 1$ η εξίσωση γίνεται: $2(y \pm 1)^2 - 10(y \pm 1)y + 13y^2 = 3$

$\Leftrightarrow 5y^2 \mp 6y - 1 = 0$, η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 56$

3. $|x - y| = 2 \Leftrightarrow x - y = 2 \text{ ή } x - y = -2 \Leftrightarrow x = y + 2 \text{ ή } x = y - 2.$

Για $x = y + 2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y + 2)^2 - 10(y + 2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της

είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \frac{12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = \frac{7}{5}.$

Άρα προκύπτει η λύση $(x, y) = (3, 1)$

Για $x = y - 2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y - 2)^2 - 10(y - 2)y + 13y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 5y^2 + 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της

είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \frac{-12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = -1 \text{ ή } y = -\frac{7}{5}.$

Άρα προκύπτει η λύση $(x, y) = (-3, -1).$

Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις: $(-1, -1), (1, 1), (3, 1), (-3, -1).$

Πρόβλημα 3

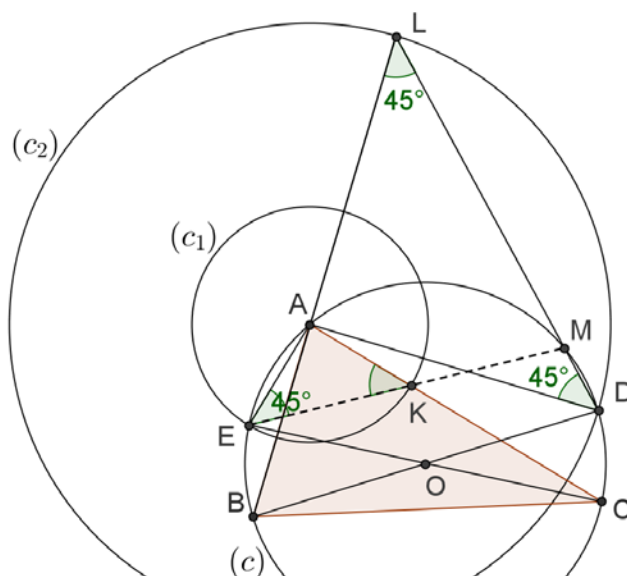
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) (με κέντρο O και ακτίνα R) και έστω D, E τα αντιδιαμετρικά σημεία των B, C , αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο (c)). Ο κύκλος (c_1) (με κέντρο A και ακτίνα AE), τέμνει την AC στο σημείο K . Ο κύκλος (c_2) (με κέντρο A και ακτίνα AD), τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του A) στο σημείο L . Να αποδείξετε ότι οι ευθείες EK και DL τέμνονται πάνω στο κύκλο (c) .

Λύση

Έστω M το σημείο τομής της DL με τον κύκλο (c) θα αποδείξουμε ότι τα σημεία E, K, M βρίσκονται επάνω στον ίδια ευθεία.

Η γωνία $\hat{EAC}$ είναι ορθή, διότι βαίνει στη διάμετρο EC του κύκλου (c) . Το τρίγωνο AEK είναι ισοσκελές (διότι AE, AK είναι ακτίνες του κύκλου (c_1)). Άρα:

$$\hat{AEK} = \hat{AKE} = 45^\circ. \quad (1)$$



Σχήμα 5

Η γωνία $\widehat{BAD}$ είναι ορθή, γιατί βαίνει στη διάμετρο BD του κύκλου (c) , οπότε και η γωνία $\widehat{DAL}$ είναι ορθή. Το τρίγωνο ADL είναι ισοσκελές (διότι AD, AL είναι ακτίνες του κύκλου (c_2)). Άρα έχουμε

$$\widehat{ADL} = \widehat{ALD} = 45^\circ. \quad (2)$$

Οι γωνίες $\widehat{ADM} = \widehat{ADL}$ και $\widehat{AEM}$ είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο $\widehat{AM}$, δηλαδή

$$\widehat{AEM} = \widehat{ADL} \quad (3)$$

Άρα από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα $\widehat{AEK} = \widehat{AEM} = 45^\circ$, οπότε τα σημεία E, K, M είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 4

Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

Λύση

Για το άθροισμα των βαθμών όλων των μαθητών έχουμε τη σχέση

$$\Sigma_x \geq 8 \cdot 100 + (x - 8) \cdot 70 \Leftrightarrow \Sigma_x \geq 70x + 240, \quad (1)$$

οπότε για το μέσο όρο των βαθμών έχουμε:

$$M.O. = \frac{\Sigma_x}{x} \geq \frac{70x + 240}{x} = 70 + \frac{240}{x}. \quad (2)$$

Έχοντας υπόψη ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών είναι 78, αν υποθέσουμε ότι ισχύει $x < 30$, τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε:

$$M.O. = \frac{\Sigma_x}{x} \geq 70 + \frac{240}{x} > 70 + \frac{240}{30} = 78, \quad (3)$$

που είναι αντίθετο προς την υπόθεση ότι ο μέσος όρος των βαθμών είναι 78.

Επομένως δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι $x < 30$, οπότε πρέπει να είναι $x \geq 30$.

Παρατηρούμε ότι για $x = 30$, έχουμε την περίπτωση

$$M.O. = \frac{\Sigma_{30}}{30} = \frac{8 \cdot 100 + (30 - 8) \cdot 70}{30} = \frac{30 \cdot 70 + 8 \cdot 30}{30} = 70 + 8 = 78,$$

οπότε η **ελάχιστη δυνατή τιμή** του x είναι 30.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Λύση

Τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186$, $\alpha \in \mathbb{R}$ με τον άξονα των x είναι της μορφής $A_1(x_1, 0)$ και $A_2(x_2, 0)$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - (3\alpha - 5)x + 186 = 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Άρα έχουμε:

$$x_1 + x_2 = 3\alpha - 5, \quad (1)$$

$$x_1 x_2 = 186 \quad (2)$$

Επειδή πρέπει οι ρίζες x_1 και x_2 να είναι ακέραιοι αριθμοί, σύμφωνα με την υπόθεση διαφορετικοί μεταξύ τους, έστω $|x_1| < |x_2|$, από την εξίσωση (2), έχουμε ότι οι x_1, x_2 πρέπει να είναι ομόσημοι ακέραιοι με γινόμενο $186 = 2 \cdot 3 \cdot 31$. Άρα έχουμε τα εξής δυνατά ζεύγη:

$$(x_1, x_2) \in \{(1, 186), (2, 93), (3, 62), (6, 31), (-1, -186), (-2, -93), (-3, -62), (-6, -31)\}$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι: $\alpha = \frac{x_1 + x_2 + 5}{3}$, οπότε οι δυνατές τιμές για την παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι οι εξής: $64, \frac{100}{3}, \frac{70}{3}, 14, -\frac{182}{3}, -30, -20, -\frac{32}{3}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Προσθέτοντας και αφαιρώντας το $x^2 y^2$ η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - x^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2 y^2 = (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$$

Επομένως, έχουμε $x^2 + y^2 - xy = \frac{91}{13} = 7$. Προσθέτοντας τώρα αυτή και τη δεύτερη

εξίσωση του συστήματος, βρίσκουμε ότι: $2(x^2 + y^2) = 20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$, οπότε

$xy = 3$ από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Έτσι καταλήγουμε στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = 6 \end{cases},$$

από το οποίο με πρόσθεση και αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 16 \\ x^2 + y^2 + 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 16 \\ (x-y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm 4 \\ x-y = \pm 2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 4 \\ x-y = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y = -4 \\ x-y = 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y = 4 \\ x-y = -2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y = -4 \\ x-y = -2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow (x, y) = (3, 1) \text{ ή } (x, y) = (-1, -3) \text{ ή } (x, y) = (1, 3) \text{ ή } (x, y) = (-3, -1). \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

Έχουμε

$$\begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases},$$

οπότε, αν θέσουμε $\varphi = x^2 + y^2$ και $\omega = xy$, λαμβάνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \varphi^2 - \omega^2 = 91 \\ \varphi + \omega = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\varphi + \omega)(\varphi - \omega) = 91 \\ \varphi + \omega = 13 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi - \omega = 7 \\ \varphi + \omega = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 10 \\ \omega = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε, όπως στον πρώτο τρόπο.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O, R)$). Η διχοτόμος $B\Delta$ τέμνει τον κύκλο $C(O, R)$, στο σημείο Z . Έστω E τυχόν σημείο του τμήματος $\Delta\Gamma$. Η ευθεία BE τέμνει τον κύκλο $C(O, R)$ στο σημείο H . Οι ευθείες $A\Gamma$ και ZH τέμνονται στο σημείο Θ . Επίσης, η ευθεία ZE τέμνει τον κύκλο στο σημείο K . Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $B\Delta H\Theta$, $B\Delta EK$ και $\Delta Z\Theta K$ είναι εγγράψιμα.

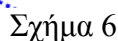
Λύση

Η γωνία $\hat{H}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $C(O, R)$ και βαίνει στο τόξο BZ . Άρα:

$$\hat{H}_1 = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2}.$$

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $A\Delta Z$. Άρα:

$$\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}Z + A\hat{Z}B = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{\Gamma}.$$



Επομένως και το τετράπλευρο $\Delta Z\Theta K$ είναι εγγράψιμο.

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$
$$d_1 = 1, \quad d_4 = n \quad \text{και} \quad d_2 \cdot d_3 = n.$$
$$\Leftrightarrow (1+d_2)(1+d_3)=640 \Leftrightarrow (1+d_2)(1+d_3)=2^7 \cdot 5$$

- $1+d_2=4, 1+d_3=160 \Leftrightarrow d_2=3, d_3=159=3 \cdot 53$, απορρίπτονται, αφού ο $n=3 \cdot 159$ έχει και άλλους διαιρέτες.

- $1+d_2=5, 1+d_3=128 \Leftrightarrow d_2=4, d_3=127$, απορρίπτονται, αφού ο $n=4 \cdot 127$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=8, 1+d_3=80 \Leftrightarrow d_2=7, d_3=79$, οπότε είναι $n=7 \cdot 79=553$
- $1+d_2=10, 1+d_3=64 \Leftrightarrow d_2=9, d_3=63$, απορρίπτονται, αφού ο $n=9 \cdot 63$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=16, 1+d_3=40 \Leftrightarrow d_2=15, d_3=39$, απορρίπτονται, αφού ο $n=15 \cdot 39$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1+d_2=20, 1+d_3=32 \Leftrightarrow d_2=19, d_3=31$, οπότε είναι $n=19 \cdot 31=589$

Τελικά, οι αριθμοί που ικανοποιούν τις αρχικές υποθέσεις είναι οι 553 και 589.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
14 Νοεμβρίου 2015

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 24 : 6 + 5^2 - 2 \cdot 8 + 8 : 2^2 + \frac{3^2}{11}, \quad B = (2^5 + 112) : 3^2 - 1 + \frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= 24 : 6 + 5^2 - 2 \cdot 8 + 8 : 2^2 + \frac{3^2}{11} = 24 : 6 + 25 - 2 \cdot 8 + 8 : 4 + \frac{9}{11} = 4 + 25 - 16 + 2 + \frac{9}{11} \\ &= 15 + \frac{9}{11} = 15 \frac{9}{11}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (2^5 + 112) : 3^2 - 1 + \frac{5}{7} = (32 + 112) : 3^2 - 1 + \frac{5}{7} = 144 : 9 - 1 + \frac{5}{7} = 16 - 1 + \frac{5}{7} \\ &= 15 + \frac{5}{7} = 15 \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{Έχουμε: } A - B = 15 \frac{9}{11} - 15 \frac{5}{7} = 15 + \frac{9}{11} - 15 - \frac{5}{7} = \frac{9}{11} - \frac{5}{7} = \frac{63 - 55}{77} = \frac{8}{77} > 0,$$

οπότε θα είναι $A > B$.

Πρόβλημα 2

Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $\alpha = 6$ μέτρα και πλάτος $\beta = 4$ μέτρα. Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:

(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, (ii) το εμβαδό του ορθογωνίου.

Λύση

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2(\alpha + \beta) = 2(6 + 4) = 20$ μέτρα και το εμβαδό του είναι $E = \alpha\beta = 6 \cdot 4 = 24$ τετραγωνικά μέτρα.

Μετά την αύξηση το μήκος του ορθογωνίου θα γίνει $6 + 6 \cdot \frac{20}{100} = 6 + 1,2 = 7,2$ μέτρα,

ενώ το πλάτος του μετά τη μείωση θα γίνει $4 - 4 \cdot \frac{5}{100} = 4 - 0,2 = 3,8$ μέτρα.

Έτσι έχουμε:

(i) Η περίμετρος του ορθογωνίου μετά την μεταβολή των διαστάσεων του θα γίνει

$$\Pi' = 2(7,2 + 3,8) = 2 \cdot 11 = 22 \text{ μέτρα, } \text{οπότε η αύξησή της είναι}$$

$$\Pi' - \Pi = 22 - 20 = 2 \text{ μέτρα και η επί τοις εκατό αύξησή της είναι}$$

$$\frac{\Pi' - \Pi}{\Pi} = \frac{2}{20} = \frac{10}{100}, \text{ δηλαδή } 10\%.$$

(ii) Το εμβαδό του ορθογωνίου μετά την αύξηση των διαστάσεων θα γίνει

$$E' = 7,2 \cdot 3,8 = 27,36 \text{ τετρ. μέτρα, } \text{οπότε η μεταβολή (αύξηση) του είναι}$$

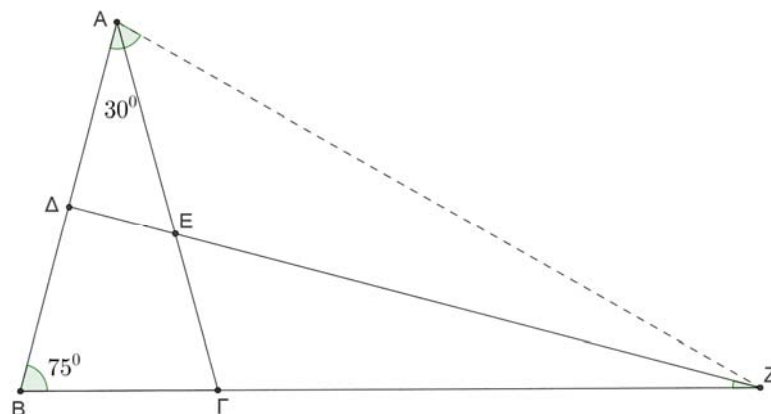
$$E' - E = 27,36 - 24 = 3,36 \text{ τετρ. μέτρα και η επί τοις εκατό αύξηση του είναι}$$

$$\frac{E' - E}{E} = \frac{3,36}{24} = 0,14 = \frac{14}{100}, \text{ δηλαδή } 14\%.$$

Πρόβλημα 3.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς AB τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E και την προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ στο σημείο Z . Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $B\hat{Z}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}Z$.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές $AB = A\Gamma$ θα έχει τις

$$\text{απέναντι γωνίες τους ίσες, δηλαδή } \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{A} = \frac{180^\circ - \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Επειδή το Z είναι σημείο της μεσοκάθετης της πλευράς AB θα απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία A και B , δηλαδή είναι $ZA = ZB$. Επομένως το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές και θα έχει τις γωνίες απέναντι των ίσων πλευρών του ίσες, δηλαδή $\hat{B}\hat{A}Z = \hat{A}\hat{B}Z = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 75^\circ$. Τότε θα είναι $\hat{A}\hat{Z}\hat{B} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$.

Η μεσοκάθετη $Z\Delta$ της πλευράς AB του τριγώνου AZB είναι και διχοτόμος της γωνίας του $\hat{A}\hat{Z}\hat{B}$, οπότε θα είναι $B\hat{Z}\Delta = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

Διαφορετικά, από το ορθογώνιο τρίγωνο $BZ\Delta$ με $B\hat{\Delta}Z = 90^\circ$, έχουμε:

$$B\hat{Z}\Delta = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

Για τη γωνία $\Gamma\hat{A}Z$ έχουμε: $\Gamma\hat{A}Z = \hat{B}\hat{A}Z - \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x-1, x, x+1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x+1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι $x=10, x+1=11$ είναι πολλαπλάσια των 10 και 11, αντίστοιχα. Επιπλέον ο 9 είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε η τριάδα 9,10,11 είναι μία λύση του προβλήματος.

Στη συνέχεια παρατηρώ ότι $\text{ΕΚΠ}(10,11)=110$, οπότε για να βρω το επόμενο ζευγάρι θετικών ακέραιων που έχουν την ίδια ιδιότητα με τους 10 και 11 πρέπει να προσθέσω και στους δύο το 110 ή κάποιο πολλαπλάσιο του 110 μέχρι που να προκύψει ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1000. Έτσι έχουμε τα ζευγάρια:

120	230	340	450	560	670	780	890
121	231	341	451	561	671	781	891

Επομένως αρκεί να ελέγξουμε ποιοι από τους αριθμούς 119, 229, 339, 449, 559, 669, 779, και 889 είναι πολλαπλάσια του 3. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί 339 και 669, οπότε λαμβάνουμε και τις λύσεις 339,340,341 και 669,670,671.

Παρατήρηση. Μετά την εύρεση της πρώτης λύση 9,10,11, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι για να προκύψει μία αντίστοιχη τριάδα θα πρέπει να προσθέσουμε και στους τρεις ακέραιους ένα πολλαπλάσιο του $\text{ΕΚΠ}(3,10,11)=330$. Έτσι εύκολα προκύπτουν και οι άλλες δύο λύσεις του προβλήματος 339,340,341 και 669,670,671.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{a-1}{a-3} + \frac{1}{33} + a^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27}$, αν $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^4$.

Λύση

Έχουμε $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$, οπότε θα είναι $a^{-1} = \frac{16}{81}$ και

$$\begin{aligned} A &= \frac{a-1}{a-3} + \frac{1}{33} + a^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27} = \frac{\frac{81}{16}-1}{\frac{81}{16}-3} + \frac{1}{33} + \frac{16}{81} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{\frac{81}{16}}{\frac{81}{16}-3} + \frac{1}{33} + \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = \frac{65}{33} + \frac{1}{33} + \frac{9}{27} = \frac{66}{33} + \frac{9}{27} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2°

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha = \frac{28}{\nu}$ και $\gamma = \frac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

Οι δυνατές τιμές του ψηφίου β των δεκάδων είναι: 0, 4, 8.

Ο ακέραιος ν πρέπει να είναι θετικός και κοινός διαιρέτης των 28 και 42, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι: 1, 2, 7, 14. Τότε οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο α είναι:

$$\alpha = 4, \text{ για } \nu = 7, \alpha = 2, \text{ για } \nu = 14.$$

Οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο γ είναι:

$$\gamma = 6, \text{ για } \nu = 7, \gamma = 3, \text{ για } \nu = 14.$$

Επομένως έχουμε: $\alpha = 4, \gamma = 6, \text{ για } \nu = 7$ και $\alpha = 2, \gamma = 3, \text{ για } \nu = 14$.

Άρα οι δυνατές τιμές του ακέραιου $\overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι: 406, 446, 486, 203, 243, 283.

Πρόβλημα 3

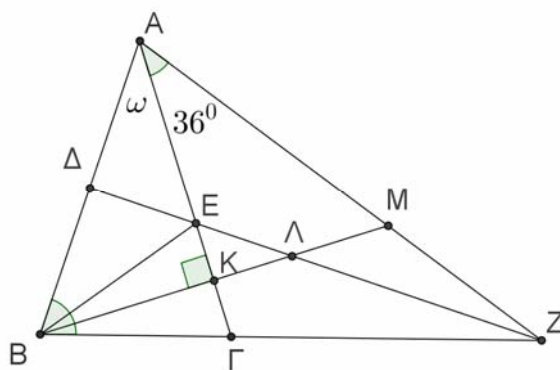
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \omega^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς AB τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E και την προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ στο σημείο Z . Η κάθετη από το σημείο B προς την πλευρά $A\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο K , το ευθύγραμμο τμήμα ΔZ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα AZ στο σημείο M . Αν είναι $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{Z} = 36^\circ$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\omega = 36^\circ$,

(β) $AM = \Gamma Z$,

(γ) $BL = \Lambda Z$.

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ θα έχουμε:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \omega}{2}.$$

Επειδή η ΔZ είναι μεσοκάθετη της πλευράς AB , το τρίγωνο ZAB είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές $ZA = ZB$, οπότε θα έχουμε:

$$\hat{Z}\hat{A}\hat{B} = \hat{Z}\hat{B}\hat{A} \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \hat{B} \Leftrightarrow \omega + 36^\circ = \frac{180^\circ - \omega}{2} \Leftrightarrow 3\omega = 108 \Leftrightarrow \omega = 36^\circ.$$

(β) Επειδή στο τρίγωνο ABM η AK είναι ύψος και διχοτόμος θα έχουμε

$$\hat{A}BK = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ = \hat{A}MK.$$

Επομένως το τρίγωνο ABM είναι ισοσκελές με $AM = AB$. Από υπόθεση είναι $AB = AG$. Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ZAB έχουμε

$$\hat{A}ZB = 180^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ = \hat{G}AZ.$$

Επομένως και το τρίγωνο GAZ είναι ισοσκελές με $AG = GZ$. Άρα έχουμε:

$$AM = AB = AG = GZ.$$

(γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta Z$ έχουμε: $\hat{\Delta}ZB = \hat{\Delta}ZB = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$, ενώ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓKB έχουμε: $\hat{\Lambda}BZ = \hat{K}B\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. Άρα έχουμε: $\hat{\Delta}ZB = \hat{\Lambda}BZ = 18^\circ \Rightarrow \Delta BZ$ ισοσκελές τρίγωνο με $B\Delta = \Lambda Z$.

Πρόβλημα 4

Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = (x + y) \cdot z^m - w$.

Λύση

Από τη συνθήκη, οι x, y, z, w, m είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5 με διαφορετική ίσως σειρά.

Για τη μέγιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο ελάχιστος, δηλαδή $w = 1$. Τους αριθμούς 4 και 5 πρέπει να τους χρησιμοποιήσουμε στη δύναμη z^m . Παρατηρούμε ότι $4^5 > 5^4$, οπότε για τη μέγιστη τιμή $z = 4, m = 5$. Οπότε απομένει να έχουμε $x + y = 2 + 3 = 5$. Συνεπώς η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $5 \cdot 4^5 - 1 = 5 \cdot 1024 - 1 = 5119$.

Για την ελάχιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο μέγιστος, δηλαδή $w = 5$ και η δύναμη z^m να είναι η ελάχιστη, οπότε $z = 1$. Η μικρότερη τιμή τώρα για το $x + y$ είναι $x + y = 2 + 3 = 5$ η ελάχιστη τιμή είναι $5 \cdot 1^4 - 5 = 0$.

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την ανίσωση: $2x + (x + 1)(x - 1) < x^2 + x - 2 + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4}$$

και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

Λύση. Έχουμε:

$$2x + (x + 1)(x - 1) < x^2 + x - 2 + \lambda$$

$$\Leftrightarrow 2x + x^2 - 1 < x^2 + x - 2 + \lambda \Leftrightarrow x < \lambda - 1,$$

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4} \Leftrightarrow 4x - 2 - 3 > 2x - 2 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{3}{2} < x < \lambda - 1$, , εφόσον ισχύει:

$$\lambda - 1 > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda > \frac{5}{2}.$$

Πρόβλημα 2

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x + y - 1 = 6(x - 3)(y + 2) \\ \frac{3}{x - 3} - \frac{4}{y + 2} = 11 \end{cases}$$

Λύση

Οι περιορισμοί είναι $x \neq 3, y \neq -2$. Θέτουμε $\frac{1}{x-3} = a$ και $\frac{1}{y+2} = b$, οπότε

$$x + y - 1 = (x - 3) + (y + 2) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} ..$$

Επομένως, με περιορισμό $a, b \neq 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{6}{ab} \\ 3a - 4b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 3a - 4b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 - b \\ 3(6 - b) - 4b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 - b \\ 7b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases},$$

οπότε $x = \frac{16}{5}, y = -1$, που πληρούν τους περιορισμούς.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x + y + x^2 + y^2 = p,$$

όπου p πρώτος θετικός ακέραιος.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται: $x + x^2 + y + y^2 = p \Leftrightarrow x(x + 1) + y(y + 1) = p$ (1)

Όμως οι αριθμοί $x(x + 1), y(y + 1)$ ως γινόμενα διαδοχικών ακέραιων **είναι και οι δύο άρτιοι**, οπότε και το άθροισμα τους θα είναι άρτιος. Επομένως πρέπει $p = 2$, αφού ο μοναδικός πρώτος που είναι άρτιος είναι το 2. Επειδή οι ακέραιοι $x(x + 1), y(y + 1)$ **είναι άρτιοι μη αρνητικοί**, έχουμε:

$$x(x + 1) + y(y + 1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 1) = 2 \\ y(y + 1) = 0 \end{cases} (\Sigma_1) \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x(x + 1) = 0 \\ y(y + 1) = 2 \end{cases} (\Sigma_2)$$

Έχουμε

$$x(x + 1) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ και } y(y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -1.$$

Επομένως το σύστημα (Σ_1) έχει τις λύσεις:

$$(x, y) = (1, 0) \text{ ή } (1, -1) \text{ ή } (-2, 0) \text{ ή } (-2, -1)$$

Ομοίως, για το σύστημα (Σ_2) βρίσκουμε τις λύσεις:

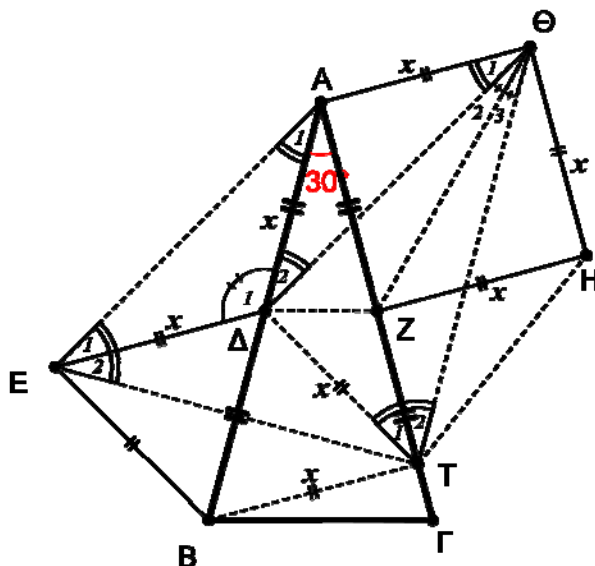
$$(x, y) = (0, 1) \text{ ή } (-1, 1) \text{ ή } (0, -2) \text{ ή } (-1, -2).$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Έστω Δ, Z τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο $B\Delta E$ και τετράγωνο $AZH\Theta$. Η μεσοκάθετη του $B\Delta$, τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο T . Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τρίγωνο AET είναι ισόπλευρο,
 (β) τα τρίγωνα ATB και $\Delta\Theta T$ είναι ίσα.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές ($\Delta A = \Delta E = x$) με $\hat{\Delta}_1 = 120^\circ$. Άρα

$$\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = 30^\circ.$$

Η ET είναι μεσοκάθετη της $B\Delta$, άρα (από το ισόπλευρο τρίγωνο $B\Delta E$) έχουμε:

$$\hat{E}_2 = \frac{\hat{B\Delta E}}{2} = 30^\circ.$$

Στο τρίγωνο AET έχουμε, $\hat{EAT} = \hat{A}_1 + \hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{AET} = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

(β) Στο ισόπλευρο τρίγωνο η AB είναι κάθετη (άρα και μεσοκάθετη) της ET . Άρα

$$\Delta E = \Delta T = BT = x \quad (1).$$

Τα ισοσκελή τρίγωνα $A\Delta\Theta$ και $A\Delta T$ είναι ίσα μεταξύ τους διότι,

$$A\Delta = A\Theta = \Delta T = x \text{ και } \hat{A\Delta\Theta} = \hat{A\Delta T} = 120^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$\Delta\Theta = AT \quad (2).$$

Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\hat{\Theta\Delta T} = 180^\circ - \hat{\Delta}_2 - \hat{B\Delta T} = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ.$$

$$\hat{ATB} = \hat{T}_1 + \hat{B\Delta T} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

Έχουμε δηλαδή ότι τα τρίγωνα ATB και $\Delta\Theta T$ είναι ορθογώνια με δύο κάθετες πλευρές ίσες (σχέσεις (1) και (2)).

Παρατήρηση. Επιπλέον, στο σημείο Z τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου $\Delta\Theta T$, δηλαδή το σημείο Z είναι έκκεντρο του τριγώνου $\Delta\Theta T$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $A = \sqrt{x^2 + 5x^2 + 2y^2} + \sqrt{x^4 + 32y^2}$ είναι σταθερή, ανεξάρτητη των x, y .

Λύση

Έχουμε ότι $x^4 + 5x^2 + 2y^2 = x^4 + 5x^2 + 4 - x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$, οπότε

$$\sqrt{x^4 + 5x^2 + 2y^2} = x^2 + 2.$$

Επιπλέον $x^4 + 32y^2 = (4 - 2y^2)^2 + 32y^2 = 16 + 16y^2 + 4y^4 = 4(y^2 + 2)^2$, οπότε

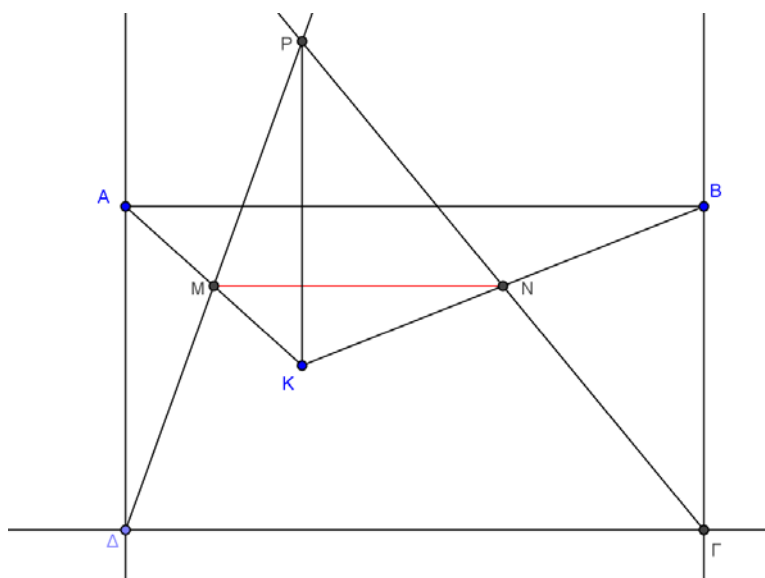
$$\sqrt{x^4 + 32y^2} = 2(y^2 + 2).$$

Συνεπώς $A = x^2 + 2 + 2(y^2 + 2) = x^2 + 2y^2 + 6 = 4 + 6 = 10$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο K στο εσωτερικό του. Θεωρούμε τα μέσα M, N των AK, BK αντίστοιχα και έστω ότι οι ευθείες $\Gamma N, \Delta M$ τέμνονται στο σημείο P . Να αποδείξετε ότι η ευθεία PK είναι κάθετη στην ευθεία $\Gamma\Delta$.

Λύση



Σχήμα 4

Στο τρίγωνο AKB το τμήμα MN συνδέει τα μέσα των πλευρών του, άρα $MN \parallel AB$ και $MN = \frac{AB}{2}$. Όμως το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οπότε $AB = \Gamma\Delta$, επομένως $MN = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ και επιπλέον $AB \parallel \Gamma\Delta$ οπότε και $MN \parallel \Gamma\Delta$. Από την τελευταία παραλληλία έπεται ότι τα τρίγωνα $PMN, P\Delta\Gamma$ είναι όμοια με λόγο

ομοιότητας $\frac{\Gamma\Delta}{\text{MN}} = 2$, οπότε θα είναι και $\frac{\text{P}\Delta}{\text{PM}} = 2$ οπότε το M είναι το μέσον του $\text{P}\Delta$. Άρα στο τετράπλευρο $\text{P}\Delta\text{K}$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως, $\text{PK} \parallel \text{A}\Delta$, οπότε, αφού $\text{A}\Delta \perp \Gamma\Delta$, έπεται ότι η ευθεία PK είναι κάθετη στην ευθεία $\Gamma\Delta$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ότι ο αριθμός a είναι θετικός ακέραιος.

(α) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\frac{5a}{2}$, $\frac{a+2}{5}$, a .

(β) Να βρείτε το υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις:

$$\frac{3x-a}{2} - \frac{x}{2} \leq \frac{2x+a}{3}, \quad 2(3x-a) + x > 2(x+1) - a, \quad a-x \leq 2(x-a)$$

καθώς και το πλήθος των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο A .

Λύση

(α) Αφού $a > 0$, έχουμε: $\frac{5a}{2} - a = \frac{3a}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{5a}{2} > a$. Επίσης, έχουμε

$$a > \frac{a+2}{5} \Leftrightarrow 5a > a+2 \Leftrightarrow 4a > 2 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}, \text{ που ισχύει αφού ο } a \text{ είναι θετικός}$$

$$\text{ακέραιος Άρα } a > \frac{a+2}{5}.$$

Επομένως έχουμε τη διάταξη: $\frac{a+2}{5} < a < \frac{5a}{2}$.

(β) Λύνουμε καθεμία από τις δεδομένες ανισώσεις. Έχουμε:

- $\frac{3x-a}{2} - \frac{x}{2} \leq \frac{2x+a}{3} \Leftrightarrow 9x-3a-3x \leq 4x+2a \Leftrightarrow 2x \leq 5a \Leftrightarrow x \leq \frac{5a}{2}.$
- $2(3x-a) + x > 2(x+1) - a \Leftrightarrow 6x-2a+x > 2x+2-a \Leftrightarrow 5x > a+2 \Leftrightarrow x > \frac{a+2}{5}.$
- $a-x \leq 2(x-a) \Leftrightarrow a-x \leq 2x-2a \Leftrightarrow 3a \leq 3x \Leftrightarrow x \geq a.$

Επειδή ισχύει ότι $\frac{a+2}{5} < a < \frac{5a}{2}$, το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο συναληθεύουν οι

$$\text{τρεις ανισώσεις είναι: } \text{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq \frac{5a}{2}, a \in \mathbb{Z}_+^* \right\} = \left[a, \frac{5a}{2} \right], a \in \mathbb{Z}_+^*.$$

Για την εύρεση των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο A θα προσδιορίσουμε τον ελάχιστο και μέγιστο ακέραιο του συνόλου A . Αν αυτοί είναι m και M , αντίστοιχα, τότε ο αριθμός των ακέραιων που περιέχονται στο σύνολο A είναι: $(M-m)+1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $a = 2k, k \in \mathbb{N}^*$. Τότε $\text{A} = [2k, 5k]$, οπότε περιέχει $3k+1 = \frac{3a}{2} + 1$ ακέραιους.
- $a = 2k+1, k \in \mathbb{N}$. Τότε $\text{A} = \left[2k+1, 5k+\frac{5}{2} \right] = \left[2k+1, 5k+2+\frac{1}{2} \right]$, οπότε περιέχει $3k+1+1 = \frac{3(a-1)}{2} + 2 = \frac{3a}{2} + \frac{1}{2}$ ακέραιους.

Πρόβλημα 4

Να λυθεί το σύστημα Σ στο σύνολο των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών:

$$\Sigma: \begin{cases} \alpha\sqrt[3]{b} - c = \alpha \\ b\sqrt[3]{c} - \alpha = b \\ c\sqrt[3]{a} - b = c \end{cases}$$

Λύση

Αν κάποιος από τους a, b, c είναι ίσος με 0, τότε από τις εξισώσεις βγαίνει ότι και οι άλλοι δύο πρέπει να είναι ίσοι με 0, οπότε $a = b = c = 0$ είναι μία λύση. Υποθέτουμε τώρα ότι $a, b, c > 0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο c είναι μεγαλύτερος ή ίσος των a, b . Τότε από την πρώτη σχέση έχουμε $\alpha\sqrt[3]{b} = \alpha + c \geq 2\alpha$, οπότε $\sqrt[3]{b} \geq 2$, δηλαδή $b \geq 8$ (1).

Οπότε θα είναι $c \geq 8$ (αφού είναι μεγαλύτερος ή ίσος του b). Οπότε από τη δεύτερη σχέση παίρνουμε $b = b\sqrt[3]{c} - a \geq 2b - a$, οπότε $a \geq b$ και από την (1) έχουμε $a \geq 8$. Η τελευταία τώρα δίνει $c = c\sqrt[3]{a} - b \geq 2c - b$, οπότε $b \geq c$.

Επομένως, τελικά έχουμε $b \geq c \geq a \geq b$, δηλαδή $a = b = c$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε $a\sqrt[3]{a} = 2a$ και αφού $a > 0$, έχουμε ότι $a = 8$, οπότε $a = b = c = 8$ είναι λύση.

Τελικά οι δύο λύσεις είναι $(a, b, c) \in \{(0, 0, 0), (8, 8, 8)\}$.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τις υπερβολές με εξισώσεις

$y = \frac{1}{x}$ και $y = -\frac{1}{x}$. Μία ευθεία ε τέμνει τον κλάδο της υπερβολής $y = \frac{1}{x}$ που

βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων στα σημεία $A\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right), B\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$,

και τους δύο κλάδους της υπερβολής $y = -\frac{1}{x}$ στα σημεία $\Gamma\left(\gamma, -\frac{1}{\gamma}\right)$ και $\Delta\left(\delta, -\frac{1}{\delta}\right)$

με $\gamma < 0 < \beta < \alpha < \delta$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha + \beta = \gamma + \delta$

(ii) τα τρίγωνα OAG και OBD έχουν ίσα εμβαδά.

Λύση

Η ευθεία ε_{AB} που περνάει από τα σημεία A και B έχει εξίσωση:

$$y - \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\beta - \alpha} \right) (x - \alpha) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

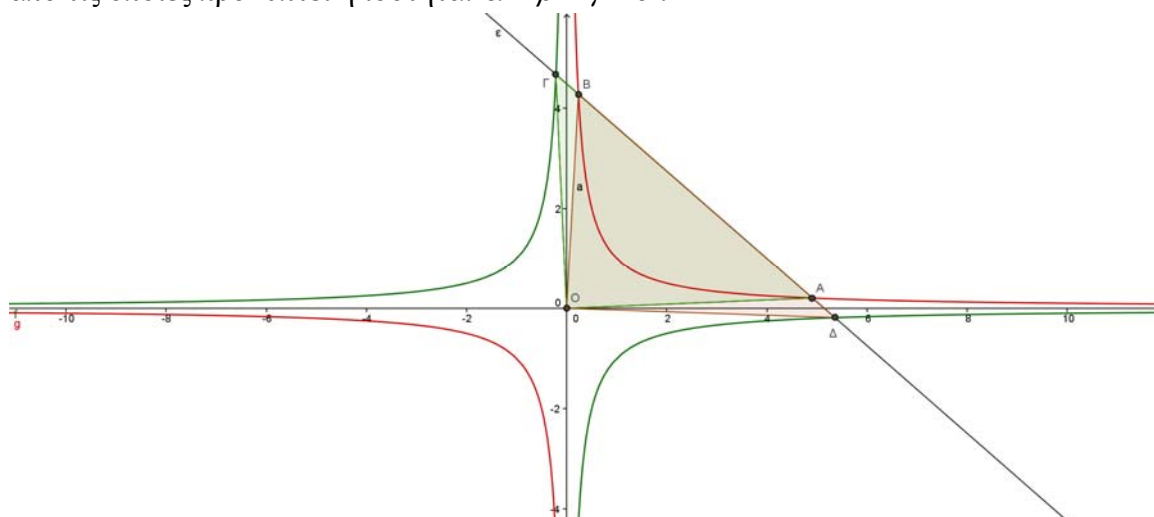
Η ευθεία $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$ που περνάει από τα σημεία Γ και Δ έχει εξίσωση:

$$y + \frac{1}{\gamma} = \left(\frac{-\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\gamma}}{\delta - \gamma} \right) (x - \gamma) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\gamma\delta} x - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta}.$$

Επειδή οι ευθείες ε_{AB} και $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$ συμπίπτουν, έπεται ότι:

$$-\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\gamma\delta} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta},$$

από τις οποίες προκύπτει η ισότητα: $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.



Σχήμα 5

(ii) Τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ έχουν τετμημένες $\frac{\alpha + \beta}{2}$ και $\frac{\gamma + \delta}{2}$ οι οποίες λόγω της (i) ταυτίζονται, οπότε τα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ έχουν κοινό μέσο, έστω M . Τότε, δεδομένης της διάταξης των σημείων πάνω στην ευθεία ε που προκύπτει από τις συνθήκες $\gamma < 0 < \beta < \alpha < \delta$, ισχύει ότι:

$$A\Gamma = AM + M\Gamma = BM + M\Delta = B\Delta,$$

οπότε τα τρίγωνα OAG και OBD έχουν ίσες βάσεις στις οποίες αντιστοιχούν ίσα ύψη από την κορυφή O , οπότε έχουν και ίσα εμβαδά.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{3x^2 - 3x + 4} + \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2x^2 + 2}.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$A(x) = 3x^2 - 3x + 4, B(x) = x^2 + 3, \Gamma(x) = 2x^2 - 3x + 5, \Delta(x) = 2x^2 + 2,$$

παρατηρούμε ότι όλα τα παραπάνω τριώνυμα έχουν αρνητική διακρίνουσα, οπότε έχουν θετική τιμή, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι ποσότητες μέσα στα ριζικά των δύο μελών της εξίσωσης έχουν σταθερό άθροισμα, δηλαδή ισχύει ότι

$$A(x) + B(x) = \Gamma(x) + \Delta(x) \Leftrightarrow A(x) - \Delta(x) = \Gamma(x) - B(x) = P(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Τότε η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\Delta(x)+P(x)} + \sqrt{B(x)} = \sqrt{B(x)+P(x)} + \sqrt{\Delta(x)} \\
& \Leftrightarrow \Delta(x)+P(x)+B(x)+2\sqrt{B(x)[\Delta(x)+P(x)]} = \\
& \quad (x)+P(x)+\Delta(x)+2\sqrt{\Delta(x)[B(x)+P(x)]} \\
& \Leftrightarrow B(x)[\Delta(x)+P(x)] = \Delta(x)[B(x)+P(x)] \\
& \Leftrightarrow P(x)[B(x)-\Delta(x)] = 0 \Leftrightarrow P(x)=0 \text{ ή } B(x)-\Delta(x)=0 \\
& \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \text{ ή } x^2+3-2x^2-2=0, \\
& \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2=1 \Leftrightarrow x=1(\text{διπλή}) \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-1.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακεραίους x, y που ικανοποιούν την εξίσωση $x^3 + y^3 - x - y = pq$, όπου p, q πρώτοι αριθμοί.

Λύση

Γράφουμε $x^3 - x = x(x^2 - 1) = (x-1)x(x+1)$, το οποίο είναι γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων, επομένως διαιρείται και από το 2 και από το 3. Επομένως ο 6 διαιρεί το $(x-1)x(x+1)$.

Όμοια ο 6 διαιρεί το $(y-1)y(y+1)$, οπότε το αριστερό μέλος διαιρείται από 6. Άρα ο 6 διαιρεί το pq , και αφού p, q πρώτοι αριθμοί, θα πρέπει $pq = 6$.

Επομένως η εξίσωση γίνεται $(x-1)x(x+1) + (y-1)y(y+1) = 6$. Αν τώρα $x, y \geq 2$, τότε $(x-1)x(x+1) + (y-1)y(y+1) \geq 6 + 6 = 12$, οπότε κάποιος είναι μικρότερος του 2, έστω ο y . Τότε όμως $(y-1)y(y+1) = 0$, οπότε $(x-1)x(x+1) = 6$ και αφού x μη αρνητικός ακέραιος, πρέπει $x = 2$. Επομένως οι λύσεις είναι:

$$(x, y) \in \{(2, 0), (2, 1), (0, 2), (1, 2)\}.$$

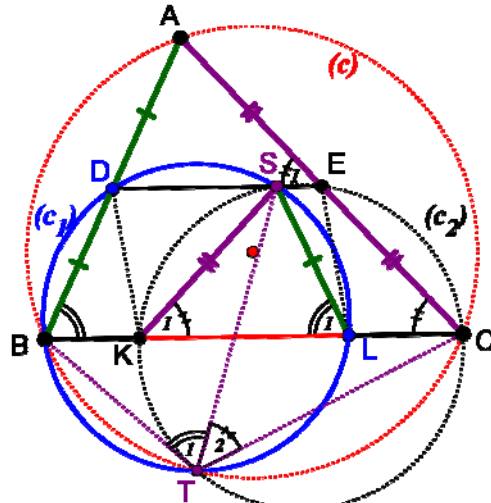
Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ και έστω D, E τα μέσα των AB και AC αντίστοιχα. Έστω T τυχόν σημείο του μικρού τόξου BC και $(c_1), (c_2)$ οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDT και CET αντίστοιχα. Οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνουν την BC στα σημεία L και K . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DELK$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

Η DE συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, άρα $DE \parallel \frac{BC}{2}$, άρα το τετράπλευρο $DELK$, είναι τραπέζιο. Επομένως, για να είναι το τετράπλευρο $DELK$ παραλληλόγραμμο, αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $DE = KL = \frac{BC}{2}$.

Έστω ότι ο κύκλος (c_1) , τέμνει το τμήμα DE στο σημείο S . Θα αποδείξουμε ότι και ο κύκλος (c_2) περνάει από το σημείο S . Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $CEST$ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 6

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABTC$, έχουμε: $\hat{A} + \hat{T}_1 + \hat{T}_2 = 180^\circ$ (1).

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $SLTB$, έχουμε: $\hat{T}_1 = \hat{L}_1$ (2).

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $DSLB$, έχουμε: $\hat{L}_1 = \hat{B}$ (3).

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) έχουμε: $\hat{T}_2 = \hat{C}$ και επειδή $\hat{E}_1 = \hat{C}$ (από την παραλληλία $DE \parallel BC$), συμπεραίνουμε ότι $\hat{T}_2 = \hat{E}_1$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $CEST$ είναι εγγράψιμο (η εξωτερική γωνία $\hat{E}_1$ είναι ίση με την απέναντι εσωτερική $\hat{T}_2$). Επομένως έχουμε αποδείξει ότι **το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκεται πάνω στην ευθεία DE .**

Παρατηρούμε τώρα ότι τα τετράπλευρα $DSLB$ και $SECK$ είναι εγγεγραμμένα τραπέζια (άρα ισοσκελή τραπέζια), οπότε θα ισχύουν οι ισότητες τμημάτων

$$SL = DB = \frac{AB}{2}, \quad SK = EC = \frac{AC}{2},$$

από τις οποίες σε συνδυασμό με τις ισότητες γωνιών $\hat{L}_1 = \hat{B}$ και $\hat{K}_1 = \hat{C}$, συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ABC και SLK είναι όμοια (με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$).

Τελικά προκύπτει ότι: $DE = KL = \frac{BC}{2}$.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{(-20)^2}{5^2} + \frac{15^3}{(-5)^3} + \frac{(-8)^3}{2^3} - \left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

Λύση

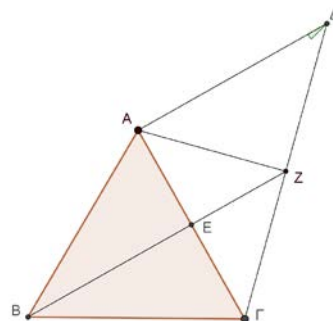
$$\begin{aligned} A &= \frac{(-20)^2}{5^2} + \frac{15^3}{(-5)^3} + \frac{(-8)^3}{2^3} - \left(\frac{-3}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{-20}{5}\right)^2 + \left(\frac{15}{-5}\right)^3 + \left(\frac{-8}{2}\right)^3 - \left(\frac{9}{-3}\right)^3 \\ &= (-4)^2 + (-3)^3 + (-4)^3 - (-3)^3 = (-4)^2 + (-4)^3 = 16 - 64 = -48. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α . Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ = α κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.

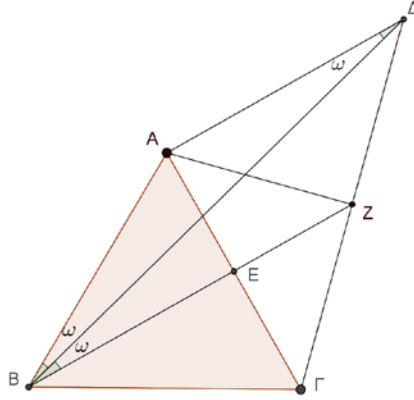
(α) Να αποδείξετε ότι $ZA = Z\Gamma$.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{A}\Delta B$.



Λύση

(α) Η διάμεσος ΒΕ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ. Επομένως το σημείο Ζ απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Γ, δηλαδή $ZA = Z\Gamma$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή είναι $AD = \alpha$, το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με

$$\hat{A}\Delta B = \hat{A}\Delta\Gamma \quad (1)$$

Όμως έχουμε

$$\hat{B}\Delta\Gamma = \hat{B}\Delta E + \hat{E}\Delta\Gamma = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \quad (2)$$

Επομένως από το τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$\hat{A}\Delta B = \hat{A}\Delta\Gamma = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

Εναλλακτικά, μετά τη σχέση (1) θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής: Η διάμεσος BE του ισοπλευρου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και ύψος, άρα κάθετη προς την πλευρά AG , όπως είναι κάθετη και η AD , από την υπόθεση. Επομένως είναι $BE \parallel AD$, οπότε

$$\hat{A}\Delta B = \hat{\Delta}BE \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$\hat{A}\Delta\Gamma = \hat{\Delta}BE. \quad (4)$$

Άρα η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}BE$, οπότε θα έχουμε

$$\hat{A}\Delta\Gamma = \hat{\Delta}BE = \frac{\hat{A}BE}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

αφού η BE είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, δηλαδή $\hat{A}BE = \frac{\hat{AB}\Gamma}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Επομένως, λόγω της (1) έχουμε $\hat{A}\Delta B = 15^\circ$.

Πρόβλημα 3

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις. Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α .

Λύση

Η τιμή πώλησης της τηλεόρασης την περίοδο των εκπτώσεων είναι

$$540 - \frac{540\alpha}{100} \text{ ευρώ.}$$

Η τιμή της τηλεόρασης μετά την περίοδο των εκπτώσεων θα γίνει

$$540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right) \frac{\beta}{100} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα ισχύει:

$$\begin{aligned} 540 - \frac{540\alpha}{100} + \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right) \frac{\beta}{100} &= 540 \Leftrightarrow \left(540 - \frac{540\alpha}{100}\right) \beta = 540\alpha \\ \Leftrightarrow \frac{540(100-\alpha)}{100} \cdot \beta &= 540\alpha \Leftrightarrow \beta = \frac{540\alpha \cdot 100}{540(100-\alpha)} \Leftrightarrow \beta = \frac{100\alpha}{100-\alpha}. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού A είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του A , αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Λύση

Για να διαιρείται ένας αριθμός με 4, το τελευταίο διψήφιο τμήμα πρέπει να διαιρείται με το 4 (κριτήρια διαιρετότητας Α Γυμνασίου). Οι πιθανές περιπτώσεις για το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού είναι: 88, 89, 98, 99. Από αυτούς μόνο ο 88 διαιρείται με το 4, οπότε ο A πρέπει να λήγει σε 88. Επίσης, ξέρουμε ότι ένας ακέραιος διαιρείται με το 3, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 3.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός A είναι διψήφιος, τότε πρέπει $A = 88$, ο οποίος δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τριψήφιος, τότε θα είναι είτε ο 888 είτε ο 988. Όμως στον 888 δεν χρησιμοποιείται το ψηφίο 9, ενώ ο 988 έχει άθροισμα ψηφίων 25 και δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τετραψήφιος είναι ένας από τους παρακάτω:

$$8888, 8988, 9888, 9988.$$

Όμως οι αριθμοί 8888, 9988 έχουν άθροισμα ψηφίων 32 και 34 αντίστοιχα, άρα δεν διαιρούνται με το 3.

Επομένως, οι μόνοι τετραψήφιοι που ικανοποιούν τις συνθήκες είναι οι 8988, 9888, οπότε η ελάχιστη τιμή του A είναι 8988.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = \frac{12^v}{3^v} : 2^{2v-1}$ και $\beta = 10^{2v+1} : 100^v$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2 \beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$$

.

Λύση

Έχουμε ότι $\alpha = \frac{12^\nu}{3^\nu} : 2^{2\nu-1} = \left(\frac{12}{3}\right)^\nu : 2^{2\nu-1} = 4^\nu : 2^{2\nu-1} = 2^{2\nu} : 2^{2\nu-1} = 2^{2\nu-(2\nu-1)} = 2$.

και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^\nu = 10^{2\nu+1} : 10^{2\nu} = 10$, οπότε είναι $\alpha^2 = 4$, $\alpha^3 = 8$ και

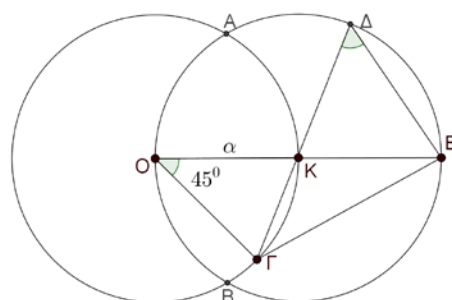
$$A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2 \beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha} = \frac{(8-10)^3 + 40 - 20 + 8}{4 + 20 - 20} = \frac{-8 + 40 - 20 + 8}{4} = 5$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $OK = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία O και K , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και B . Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο KB και η ευθεία GK τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου K και ακτίνας α στο σημείο Δ . Η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου K και ακτίνας α στο σημείο E . Αν είναι $\widehat{KOG} = 45^\circ$, να βρείτε :

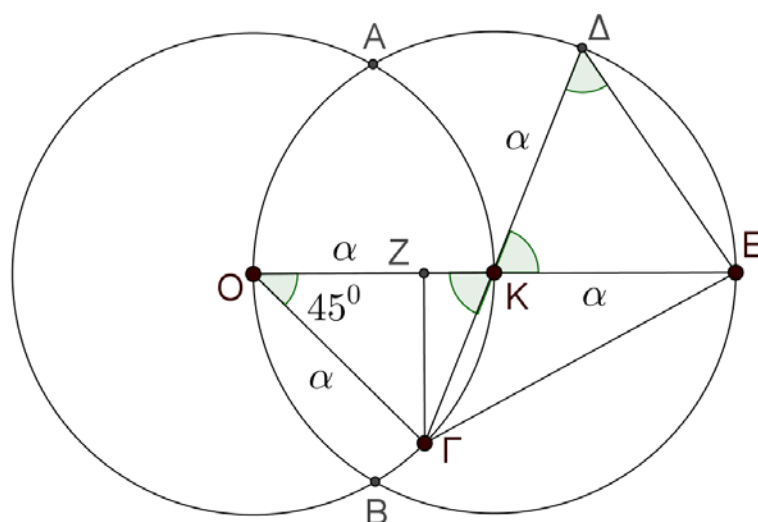
(α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\widehat{K\Delta E}$,

(β) το εμβαδόν του τριγώνου OGE συναρτήσει του α .



Λύση

(α) Το τρίγωνο OKG έχει $OK = OG = \alpha$, οπότε είναι ισοσκελές με βάση KG . Άρα έχει τις προσκείμενες στη βάση γωνίες του ίσες, οπότε θα είναι:



Σχήμα 2

$$\widehat{OKG} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67,5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Επίσης, επειδή οι γωνίες $\widehat{K\Delta E}$ και $\widehat{OKG}$ είναι κατά κορυφή, έχουμε

$$\Delta\hat{K}E = O\hat{K}\Gamma = 67,5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Η γωνία $\hat{K}\Delta E$ είναι μία από τις ίσες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΔKE (έχει $K\Delta = KE = \alpha$), οπότε

$$\hat{K}\Delta E = \frac{180^\circ - 67,5^\circ}{2} = \frac{112,5^\circ}{2} = 56,25^\circ \text{ μοίρες}$$

(β) Έστω ΓZ το ύψος του τριγώνου $O\Gamma E$ από την κορυφή Γ . Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $O\Gamma Z$ έχουμε

$$\Gamma Z = \alpha \cdot \eta\mu 45^\circ = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2},$$

οπότε το εμβαδόν του τριγώνου $O\Gamma E$ είναι

$$E(O\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{2}}{2}.$$

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος και οι φίλοι του ήταν συνολικά x , όπου $x \geq 4$, από την υπόθεση. Τότε ο καθένας τους αρχικά πήρε $\frac{450}{x}$ καραμέλες. Ο τρεις φίλοι επέστρεψαν στο Γιώργο συνολικά

$$3 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{450}{x} = \frac{270}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Ο Γιώργος πήρε συνολικά

$$\frac{450}{x} + \frac{270}{x} = \frac{720}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος, πρέπει:

$$\frac{720}{x} > 120 \Leftrightarrow 120x < 720 \Leftrightarrow x < 6.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές για το x είναι $x = 4$ ή $x = 5$. Όμως η τιμή $x = 4$ απορρίπτεται, γιατί η διαίρεση $450 : 4$ δεν δίνει ακέραιο πηλίκο. Άρα είναι $x = 5$ και ο Γιώργος πήρε συνολικά $\frac{720}{5} = 144$ καραμέλες.

Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \overline{3a5b} = 3 \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + b \quad \text{και} \quad B = \overline{5c3d} = 5 \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + d.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a, b, c, d , ισχύει ότι: $\frac{A}{36} < \frac{B}{45}$

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{A}{36}$, $\frac{B}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να

βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a, b, c, d .

Λύση

(α) Ισχύει ότι $\frac{A}{36} = \frac{\overline{3a5b}}{36} < \frac{3959}{36} < \frac{3960}{36} = 110$. Επίσης η μικρότερη τιμή του $\overline{5c3d}$ λαμβάνεται όταν $c = d = 0$, άρα

$$\frac{B}{45} = \frac{\overline{5c3d}}{45} > \frac{5030}{45} > 111.$$

Επομένως, για οποιαδήποτε ψηφία a, b, c, d ισχύει ότι:

$$\frac{A}{36} = \frac{\overline{3a5b}}{36} < 110 < 111 < \frac{\overline{5c3d}}{45} = \frac{B}{45}.$$

(β) Από το πρώτο ερώτημα ξέρουμε ότι πάντα υπάρχουν δύο ακέραιοι ανάμεσά τους, το 110 και το 111, αφού δείξαμε ότι $\frac{A}{36} < 110 < 111 < \frac{B}{45}$.

Για να είναι μόνο αυτοί οι ακέραιοι ανάμεσά τους, θα πρέπει

$$109 \leq \frac{\overline{3a5b}}{36} < 110 < 111 < \frac{\overline{5c3d}}{45} \leq 112.$$

Από την ανισότητα αριστερά παίρνουμε ότι $\overline{3a5b} > 109 \cdot 36 \Leftrightarrow \overline{3a5b} > 3924$, οπότε πρέπει $a = 9$ και ο b μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το 0 μέχρι το 9.

Από την ανισότητα δεξιά παίρνουμε

$$\frac{\overline{5c3d}}{45} \leq 112 \Leftrightarrow \overline{5c3d} < 112 \cdot 45 \Leftrightarrow \overline{5c3d} < 5040,$$

οπότε $c = 0$ και το d μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από 0 μέχρι 9.

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) + 5x \leq x^3 + x + 19. \quad (1)$$

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{23}{9} > \frac{4x-21}{9} \quad (2)$$

Λύση.

Έχουμε:

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) + 5x \leq x^3 + x + 19 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1 + 5x \leq x^3 + x + 19$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 1 + 5x \leq x^3 + x + 19 \Leftrightarrow 4x \leq 20 \Leftrightarrow x \leq 5.$$

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{23}{9} > \frac{4x-21}{9} \Leftrightarrow 6x - 3 - 23 > 4x - 21 \Leftrightarrow 2x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{5}{2} < x \leq 5$, οπότε οι ακέραιες τιμές του x που τις συναληθεύουν είναι οι τιμές 3, 4 και 5.

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί θετικός ακέραιος $A = \overline{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0} = \alpha_n \cdot 10^n + \alpha_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$, $n \geq 2$, ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

Λύση

Επειδή τα ψηφία του αριθμού έχουν γινόμενο 8 και άθροισμα 8, αυτά πρέπει να είναι διαιρέτες του 8 που έχουν άθροισμα 8. Οι διαιρέτες του 8 είναι οι θετικοί ακέραιοι 1, 2, 4 και 8. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα πολλαπλάσια του 8 είναι άρτιοι ακέραιοι, οι δυνατές επιλογές ψηφίων είναι:

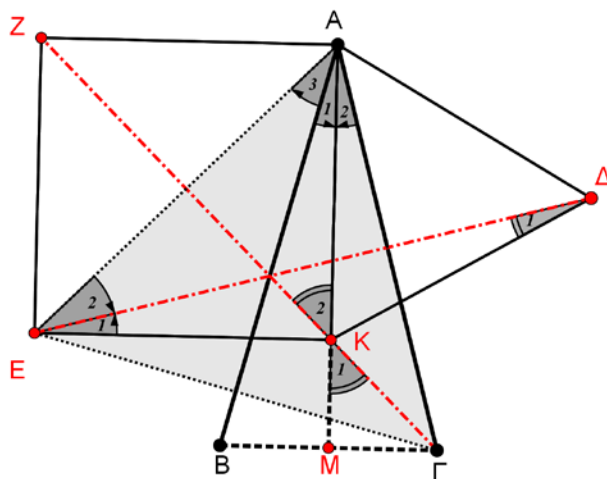
- 1, 1, 2 και 4, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 1124, 1142, 1214, 1412, 2114, 4112. Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός $A = 4112$ διαιρείται με το 8.
- 1, 1, 2, 2, 2, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 11222, 12122, 12212, 21122, 21212 και 22112. Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός $A = 22112$ διαιρείται με το 8.

Άρα υπάρχουν δύο δυνατές τιμές του A που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος. Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος 4112 και ο πενταψήφιος 22112.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και $\hat{A}=30^\circ$. Στο ύψος AM θεωρούμε σημείο K ώστε $MB=MG=MK$. Με βάση την AK κατασκευάζουμε τετράγωνο $AKEZ$ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την AM , που περιέχει το B) και ισόπλευρο τρίγωνο $AK\Delta$ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την AM , που περιέχει το Γ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔE και ΓZ , τέμνονται πάνω στην AB .

Λύση



Σχήμα 3

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Γ, K, Z είναι συνευθειακά.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $M\Gamma K$, έχουμε: $\hat{K}_1 = 45^\circ$.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο AKZ , έχουμε: $\hat{K}_2 = 45^\circ$.

Άρα τα σημεία Γ, K, Z είναι συνευθειακά, οπότε η ΓZ είναι μεσοκάθετος της AE (*) και κατά συνέπεια το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές ($\Gamma A = \Gamma E$).

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 15^\circ \text{ (διότι } \widehat{A} = 30^\circ \text{)} \text{ και } \widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = 45^\circ \text{ (διότι } \widehat{EAK} = 45^\circ \text{)}.$$

Άρα $\widehat{EAG} = 60^\circ$ και κατά συνέπεια το ισοσκελές τρίγωνο AEG είναι ισόπλευρο.

$$\text{Επιπλέον } \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 30^\circ = \widehat{A}_3.$$

Άρα η AB είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{EAG}$ (**).

$$\text{Στο ισοσκελές τρίγωνο } \triangle KE \text{ ισχύει } \widehat{AKE} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

Άρα $\widehat{A}_1 + \widehat{E}_1 = 15^\circ$. Επειδή όμως $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 45^\circ$, καταλήγουμε $\widehat{E}_2 = 30^\circ$,

δηλαδή η ED είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AEG}$ (***).

Από τα συμπεράσματα (*), (**) και (***) καταλήγουμε ότι οι ΔΕ, ΓΖ και ΑΒ συντρέχουν, δηλαδή οι ΔΕ και ΓΖ τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k , ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο

$$A = 2017 \cdot 2016 \cdot 2015 \cdot 2013 \cdot 2012 \cdot 2011,$$

να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

Λύση

Θέτουμε $n = 2014$ και τότε έχουμε: $A = (n+3)(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)$ και θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμό A στη μορφή $A = \varphi(n)^2 - k$, όπου $\varphi(n)$ πολυώνυμο μεταβλητής n με ακέραιους συντελεστές και k θετικός ακέραιος.

Με εκτέλεση των πράξεων, έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= (n^2 - 9)(n^2 - 4)(n^2 - 1) = n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36 = \\ &= n^2(n^4 - 14n^2 + 49) - 36 = n^2(n^2 - 7)^2 - 36 \end{aligned}$$

Επομένως, αν στον αριθμό A προσθέσουμε θετικό ακέραιο $k = 36$, παίρνουμε ότι $A + 36 = n^2(n^2 - 7)^2 = (n^3 - 7n)^2$, που δίνει έναν θετικό ακέραιο υψωμένο στο τετράγωνο. Άρα μία τιμή για το k είναι η τιμή $k = 36$.

Σημείωση.

Μία σύντομη απάντηση μπορεί να δώσει κάποιος στο πρόβλημα, αν θεωρήσει τον αριθμό $k = B^2 - A$, με $B^2 > A$, όπου B θετικός ακέραιος. Για παράδειγμα, ένας τέτοιος αριθμός είναι ο $k = A^2 - A$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακεραίου αριθμού α για την οποία ο ακέραιος

$$A = (\alpha^2 + 18)^2 - (8\alpha + 1)^2$$

είναι πρώτος.

Λύση
Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= (\alpha^2 + 18)^2 - (8\alpha + 1)^2 = (\alpha^2 + 18 + 8\alpha + 1)(\alpha^2 + 18 - 8\alpha - 1) \\ &= (\alpha^2 + 8\alpha + 19)(\alpha^2 - 8\alpha + 17) = [(\alpha + 4)^2 + 3][(\alpha - 4)^2 + 1]. \end{aligned}$$

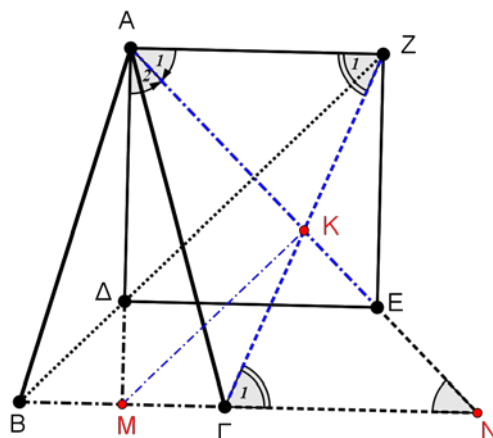
Επειδή $(\alpha + 4)^2 + 3 \geq 3$, ο ακέραιος A θα είναι πρώτος, μόνον όταν

$$(\alpha - 4)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 4$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB=ΑΓ) και σημείο Δ στη διάμεσό του ΑΜ τέτοιο, ώστε MB = ΜΓ = ΜΔ. Με βάση την ΑΔ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΖ, να αποδείξετε ότι η ΜΚ είναι παράλληλη στην ΔΖ.

Λύση



Σχήμα 3

Προεκτείνουμε τις ΑΕ , ΒΓ και έστω Ν το σημείο τομής τους.

Από την ισότητα των γωνιών $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{N} = 45^\circ$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.

Επομένως $MA=MN \Leftrightarrow M\Delta+\Delta A=M\Gamma+GN$ και με δεδομένη την ισότητα $M\Gamma=M\Delta$, καταλήγουμε: $A\Delta=GN=AZ$.

Θα συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ.

Ισχύουν οι ισότητες: α) $GN=AZ$ β) $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{Z}_1$ και γ) $\widehat{A}_1 = \widehat{N}$.

Άρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ είναι ίσα, οπότε $KZ=K\Gamma$ και $KA=KN$.

Επομένως, η ΜΚ είναι διάμεσος (άρα και ύψος) στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΝ. Οπότε οι ΜΚ και ΔΖ είναι παράλληλες (διότι είναι και οι δύο κάθετες στην διαγώνιο ΑΕ).

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha} > 2\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}}. \quad (1)$$

Πράγματι, η τελευταία είναι ισοδύναμη με

$$\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\right)^2 > \frac{4(\alpha+1)}{\alpha} \Leftrightarrow (2\alpha+1)^2 > 4\alpha(\alpha+1) \Leftrightarrow 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 > 4\alpha^2 + 4\alpha,$$

που ισχύει.

Αν βάλουμε τώρα στην (1) όπου α το $\alpha+1$, παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+3}{\alpha+1} > 2\sqrt{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} \quad (2)$$

Και ομοίως παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+5}{\alpha+2} > 2\sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+2}} \quad (3) \quad \text{και} \quad \frac{2\alpha+7}{\alpha+3} > 2\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha+3}} \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2), (3) και (4) κατά μέλη, έχουμε ότι:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \cdot \frac{\alpha+3}{\alpha+2} \cdot \frac{\alpha+4}{\alpha+3}} = 16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

που είναι το ζητούμενο.

Σημείωση.

Η ανισότητα (1) θα μπορούσε να προκύψει μέσω της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, αφού $\alpha > 0$, ως εξής:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha} = 1 + \frac{\alpha+1}{\alpha} > 2\sqrt{1 \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha}} = 2\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}},$$

αφού είναι $\frac{\alpha+1}{\alpha} \neq 1$. Ομοίως προκύπτουν και οι ανισότητες (2), (3) και (4), οπότε

τελειώνουμε την άσκηση όπως παραπάνω.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν οι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{ x + \frac{1}{x} - w = 2, \quad y + \frac{1}{y} - w = 2, \quad z + \frac{1}{z} + w = 2, \quad y + \frac{1}{z} + w = 2 \right\}.$$

Λύση

Έστω

$$(\Sigma) \quad \left\{ x + \frac{1}{x} = w + 2 \quad (1), \quad y + \frac{1}{y} = w + 2 \quad (2), \quad z + \frac{1}{z} = 2 - w \quad (3), \quad y + \frac{1}{z} = 2 - w \quad (4) \right\}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow (x - y) \left(1 - \frac{1}{xy} \right) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ ή } xy = 1.$$

Περίπτωση 1: Έστω $x = y$. Τότε από τις (3) και (4) έχουμε:

$$z + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{z} \Leftrightarrow (z - x) \left(1 + \frac{1}{zx} \right) = 0 \Leftrightarrow x = z \text{ ή } xz = -1.$$

- Αν $x = z$, τότε $x = y = z$ και από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

$$w = 0 \text{ και } x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow w = 0 \text{ και } x = 1. \text{ Επομένως, σε αυτή την}$$

υποπερίπτωση έχουμε τη λύση $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 0)$.

- Αν $xz = -1$, τότε οι x, z θα είναι ετερόσημοι, οπότε ένας θα είναι αρνητικός.

Περίπτωση 2: Έστω $xy = 1$. Τότε με αφαίρεση της (4) από την (3) λαμβάνουμε:

$$z - \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1, \text{ αφού } z \geq 0.$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) λαμβάνουμε

$$x + \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2.$$

- Για $x = 1$, προκύπτει πάλι η λύση $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 0)$.
- Για $x = 2$, προκύπτει η λύση $(x, y, z, w) = \left(2, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)$.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

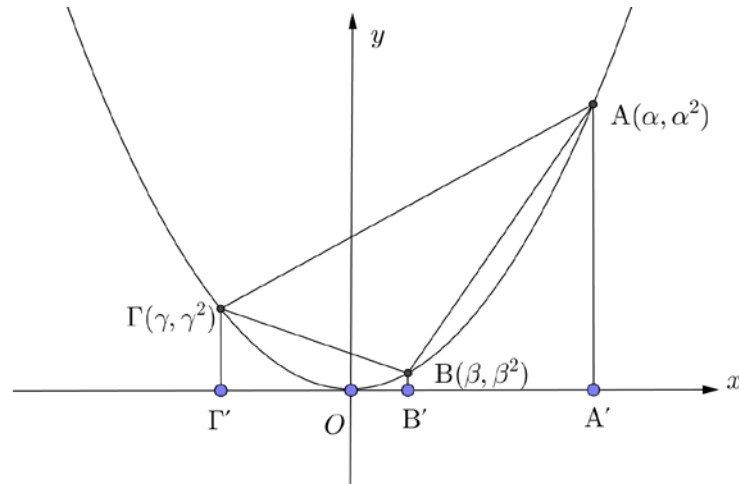
Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ και τα σημεία της A, B και Γ με τετμημένες α, β και γ , αντίστοιχα, έτσι ώστε $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \omega > 0$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του ω .

Λύση

Αν είναι A', B' και Γ' οι προβολές των σημείων A, B και Γ πάνω στον άξονα $x'x$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} E(AB\Gamma) &= E(AG\Gamma'A') - E(ABB'A') - E(B\Gamma\Gamma'B') \\ &= \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{2} \cdot 2\omega - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \cdot \omega - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2} \cdot \omega = \frac{\omega}{2} \cdot (2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \beta^2 - \gamma^2) \\ &= \frac{\omega}{2} \cdot (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \beta^2) = \frac{\omega}{2} \cdot [\alpha^2 - \beta^2 - (\beta^2 - \gamma^2)] = \\ &= \frac{\omega}{2} \cdot [(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - (\beta - \gamma)(\beta + \gamma)] = \frac{\omega^2}{2} \cdot (\alpha + \beta - \beta - \gamma) = \frac{\omega^2}{2} \cdot 2\omega = \omega^3 \end{aligned}$$



Σχήμα 5

Σημείωση.

Η άσκηση μπορεί να λυθεί με χρήση του τύπου εμβαδού τριγώνου από την Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου της Β' Λυκείου. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 E(AB\Gamma) &= \frac{1}{2} \det(\mathbf{BA}, \mathbf{B\Gamma}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \alpha - \beta & \alpha^2 - \beta^2 \\ \gamma - \beta & \gamma^2 - \beta^2 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} [(\alpha - \beta)(\gamma^2 - \beta^2) - (\alpha^2 - \beta^2)(\gamma - \beta)] \\
 &= \frac{1}{2} (\alpha - \beta)(\gamma - \beta)(\gamma + \beta - \alpha - \beta) \\
 &= \frac{1}{2} (\alpha - \beta)(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha) = \frac{1}{2} \omega \cdot (-\omega)(-2\omega) = \omega^3.
 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 45^\circ$. Στο ύψος AD θεωρούμε σημείο K ώστε $\Delta B = \Delta \Gamma = \Delta K$. Οι προεκτάσεις των υψών BE και ΓZ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$, στα σημεία M και N αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία N , K και M είναι συνευθειακά.

Λύση

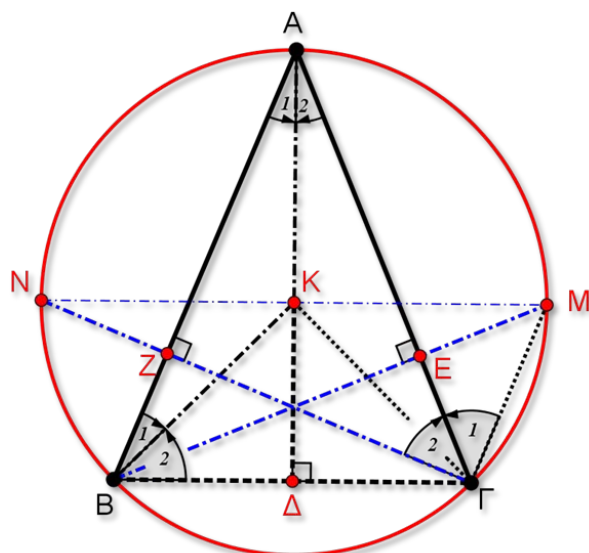
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $KA = KB = K\Gamma$ (δηλαδή ότι το σημείο K είναι το περίκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$).

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $B\Delta K$, έχουμε: $\hat{B}_2 = 45^\circ$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ (αφού $\hat{A} = 45^\circ$) έχουμε:

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{A}_1 = 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ.$$

Άρα $\hat{B}_1 = \hat{B} - \hat{B}_2 = 67,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ = \hat{A}_1$, δηλαδή το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές με $KA = KB$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι $KA = K\Gamma$, οπότε το K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.



Σχήμα 6

Η γωνία $\hat{\Gamma}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου που βαίνει στο τόξο AM.

Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{MBA} = 90^\circ - \hat{A} = 45^\circ$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο AEB).

Ισχύει επίσης $\hat{\Gamma}_2 = 90^\circ - \hat{A} = 45^\circ$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο AΓZ).

Επομένως $\hat{M\hat{\Gamma}N} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 90^\circ$, δηλαδή η MN είναι διάμετρος του κύκλου, άρα θα περνά από το κέντρο K του κύκλου.

Πρόβλημα 3

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

(α) $P(1)=1, P(2)=4, P(3)=9, P(4)=16$.

(β) Όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(5)$.

Λύση

Το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - x^2$ είναι τετάρτου βαθμού και λόγω της (α) έχει ρίζες τους αριθμούς 1, 2, 3 και 4. Επομένως μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$Q(x) = P(x) - x^2 = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x^2$$

$$\Leftrightarrow P(x) = ax^4 - 10ax^3 + (35a+1)x^2 - 50ax + 24a$$

Άρα είναι

$$P(5) = 24a + 25.$$

Λόγω της (β) έχουμε:

$$a \leq 10, -10a \leq 10, 35a + 1 \leq 10, -50a \leq 10, 24a \leq 10$$

$$\Leftrightarrow a \leq 10, a \geq -1, a \leq \frac{9}{35}, a \geq -\frac{1}{5}, a \leq \frac{10}{24} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leq a \leq \frac{9}{35}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$-\frac{1}{5} \leq a \leq \frac{9}{35} \Leftrightarrow -\frac{24}{5} \leq 24a \leq \frac{9 \cdot 24}{35} \Leftrightarrow -\frac{24}{5} + 25 \leq 24a + 25 \leq \frac{9 \cdot 24}{35} + 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{101}{5} \leq 24a + 25 \leq \frac{1091}{35} \Leftrightarrow \frac{101}{5} \leq P(a) \leq \frac{1091}{35},$$

δηλαδή η μικρότερη δυνατή τιμή του $P(a)$ είναι $\frac{101}{5}$ και η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(a)$ είναι $\frac{1091}{35}$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό $A = 14^7 + 14^2 + 1$.

Λύση

Θέτουμε για ευκολία $n = 14$ και θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμό $A = n^7 + n^2 + 1$. Πράγματι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο $n^2 + n + 1$ είναι παράγοντάς του A ως εξής:

$$\begin{aligned} A &= n^7 + n^2 + 1 = n^7 - n + n^2 + n + 1 = n(n^6 - 1) + n^2 + n + 1 = \\ &= n(n^3 + 1)(n^3 - 1) + n^2 + n + 1 = n(n^3 + 1)(n - 1)(n^2 + n + 1) + n^2 + n + 1 = \\ &= (n^2 + n + 1)(n^5 - n^4 + n^2 - n + 1) \end{aligned}$$

Επομένως ο αριθμός $n^2 + n + 1 = 14^2 + 14 + 1 = 211$ διαιρεί τον αριθμό A . Επιπλέον, ο 211 είναι πρώτος και το ζητούμενο έπεται.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-10)^3}{2^3} + \frac{(-15)^3}{(-3)^3} \right) \cdot (-2)^3 + \frac{(-8)^2}{2^2} - \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2}.$$

Λύση

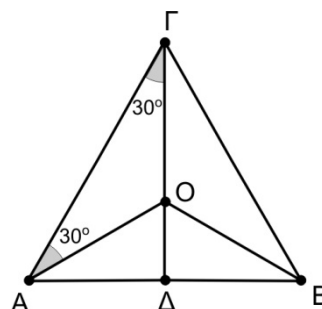
$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-10)^3}{2^3} + \frac{(-15)^3}{(-3)^3} \right) \cdot (-2)^3 + \frac{(-8)^2}{2^2} - \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2} \\ &= \left(\left(\frac{-10}{2} \right)^3 + \left(\frac{-15}{-3} \right)^3 \right) \cdot (-2)^3 + \frac{(-8)^2}{2^2} - (-4)^2 \\ &= \left((-5)^3 + (+5)^3 \right) \cdot (-2)^3 + (-4)^2 - (-4)^2 \\ &= (-5^3 + 5^3) \cdot (-2)^3 + 16 - 16 = 0 \cdot (-2)^3 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ABΓ και ABO είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά AB. Αν η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση AB στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι:

(α) Η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς τη AB και το σημείο Δ είναι το μέσο της AB.

(β) Αν $\widehat{O\hat{A}G} = \widehat{O\hat{G}A} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{A}G}$.



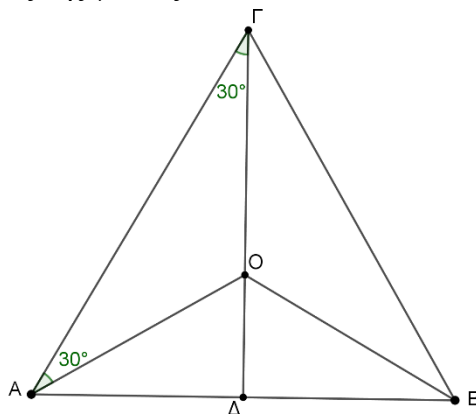
Λύση

(α) Επειδή τα τρίγωνα ABΓ και ABO είναι ισοσκελή με βάση τη AB, έχουμε ότι $GA = GB$ και $OA = OB$, δηλαδή τα σημεία Γ και Ο ανήκουν στη μεσοκάθετη του AB, οπότε η ευθεία ΓΟ είναι η μεσοκάθετη του AB. Επομένως τέμνει κάθετα την AB στο μέσο της, δηλαδή $AD = DB$.

(β) Το τρίγωνο $\Delta\Gamma\Lambda$ είναι ορθογώνιο στο Γ και έχει $\hat{A}\Gamma\Delta = 30^\circ$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}\Lambda\Gamma = 60^\circ$. Επομένως

$$\hat{\Delta}\Lambda\Gamma = \hat{\Delta}\Lambda\Gamma - \hat{O}\Lambda\Gamma = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \hat{O}\Lambda\Gamma,$$

οπότε η AO είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}\Lambda\Gamma$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν το 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσόν κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους.

Λύση

Το ποσόν του ΦΠΑ είναι: $1200 \cdot \frac{24}{100} = 12 \cdot 24 = 288$ ευρώ, οπότε η τιμή του σαλονιού

μαζί με το ΦΠΑ είναι: $1200 + 288 = 1488$ ευρώ.

Οι τόκοι που πρέπει να πληρωθούν είναι: $1488 \cdot \frac{5}{100} = \frac{7440}{100} = 74,4$ ευρώ.

Η τελική τιμή που θα πληρώσει ο Γιώργος είναι:

$$1200 + 288 + 74,4 = 1562,4 \text{ ευρώ,}$$

οπότε η κάθε μηνιαία δόση είναι: $1562,4 : 12 = 130,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος A διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς A .

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Ο A έχει τρεις φορές ψηφίο το 5 και ένα ακόμη ψηφίο τα x . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $15 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 5553.
- Ο A έχει δύο φορές ψηφίο το 5 μία φορά το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $18 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 0$ ή $x = 9$. Άρα έχουμε τους αριθμούς :

5580, 5589, 5850, 5859, 8550, 8559.

- Ο Α έχει μία φορά το ψηφίο 5 δύο φορές το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $21+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=6$. Άρα έχουμε τους αριθμούς: 5886, 8586, 8856.
- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x . Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $24+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 8883.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός N είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}} + \frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}} \right) \cdot (-2017)^2 + \frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}} - \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2\nu} + 2018.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}} + \frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}} \right) \cdot (-2017)^2 + \frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}} - \left(-\frac{1}{4} \right)^{-2\nu} + 2018 \\ &= \left(\left(-\frac{10}{2} \right)^{2\nu+1} + \left(+\frac{15}{3} \right)^{2\nu-1} \right) \cdot (-2017)^2 + \left(-\frac{8}{2} \right)^{2\nu} - \left(-\frac{4}{1} \right)^{2\nu} + 2018 \\ &= \left((-5)^{2\nu+1} + (+5)^{2\nu-1} \right) \cdot (-2017)^2 + (-4)^{2\nu} - (-4)^{2\nu} + 2018 \\ &= \left(-5^{2\nu+1} + 5^{2\nu-1} \right) \cdot (-2017)^2 + 2018 = -5^{2\nu-1} (5^2 - 1) 2017^2 + 2018 \\ &= -24 \cdot 5^{2\nu-1} \cdot 2017^2 + 2018 = -24 \cdot 5^{2\nu-1} \cdot 4068289 + 2018. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Λύση

Ονομάζουμε Α, Β το εμβαδό μιας άσπρης πλάκας και μιας μαύρης πλάκας, αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι χρησιμοποιούμε x λευκές πλάκες. Τότε αφού οι μαύρες είναι τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των πλακών, χρησιμοποιούμε $2x$ από τις μαύρες πλάκες.

Επιπλέον, αφού το εμβαδό των μαύρων πλακών είναι 80τ.μ, θα έχουμε ότι $(2x) \cdot B = 80$. Όμως, από τα δεδομένα έχουμε ότι $A = 9B$. Επομένως το συνολικό εμβαδό που καλύπτουν οι άσπρες πλάκες είναι $xA = x(9B) = 9xB = 9 \cdot 40 = 360$. Επομένως το συνολικό εμβαδό της αυλής είναι $360 + 80 = 440$ τ.μ.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε θετικό ακέραιο A χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο A που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό A μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 6 όσες φορές θέλουμε, έστω $k \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $k = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 6 όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Ο θετικός ακέραιος που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής

$$\text{πολ.}6 + 4 = \text{πολ.}3 + 3 + 1 = \text{πολ.}3 + 1,$$

οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επομένως τέσσερις από τους αριθμούς 2, 3, ..., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του A .

Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό A που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2, 4, 7, 8.

Για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού πρέπει να είναι 64. Ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 2 και το 8, αλλά δεν διαιρείται με το 7. Επειδή ο 664 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον τετραψήφιο αριθμό 6664 ο οποίος διαιρείται με τους 2, 4, 8 και 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος αριθμός.

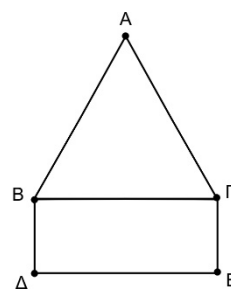
Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς α . Το σχήμα $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρά

$$B\Delta = \frac{\alpha}{2}.$$

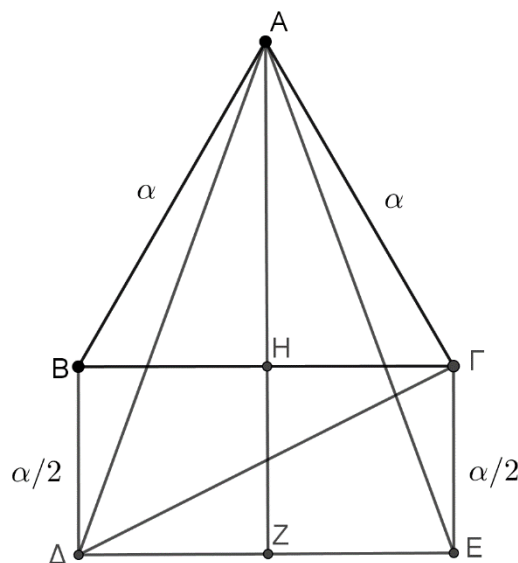
(α) Να αποδείξετε ότι $AD = AE$.

(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$.



Λύση

(α) (1^{ος} τρόπος) Έστω ότι η κάθετη από την κορυφή A προς την πλευρά $B\Gamma$ την τέμνει στο H και έστω επίσης τέμνει την πλευρά ΔE του ορθογωνίου στο Z . Τότε η AH είναι μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$, οπότε $BH = H\Gamma$. Επειδή η AZ είναι κάθετη προς την πλευρά $B\Gamma$ θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της ΔE . Επομένως και τα τετράπλευρα $B\Delta ZH$, $HZE\Gamma$ είναι ορθογώνια, οπότε $BH = \Delta Z$ και $H\Gamma = ZE$. Επομένως θα είναι και $\Delta Z = ZE$. Έτσι η AZ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΔE , οπότε $AD = AE$.



Σχήμα 2

(2^{ος} τρόπος) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ έχουν ίσες πλευρές $AB = A\Gamma = \alpha$ και $B\Delta = \Gamma E = \frac{\alpha}{2}$, ενώ οι περιεχόμενες γωνίες σε αυτές τις πλευρές είναι επίσης ίσες, αφού

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{B}\hat{\Delta} = 60^\circ + 90^\circ = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} + \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{E} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{E}.$$

Επομένως τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $A\Delta = AE$.

(β) Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$(AB\Delta) = (ABH) + (B\Delta ZH) - (A\Delta Z),$$

όπου

$$(ABH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}, \quad (B\Delta ZH) = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},$$

$$(A\Delta Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha + \alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2(\sqrt{3}+1)}{8} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\alpha^2}{8}.$$

Άρα είναι

$$(AB\Delta) = (ABH) + (B\Delta ZH) - (A\Delta Z) = \frac{\alpha^2}{8}.$$

Έχουμε επίσης $(A\Delta\Gamma) = (AB\Gamma) + (B\Delta\Gamma) - (AB\Delta)$. Όμως είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}, \quad (B\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4}, \quad (AB\Delta) = \frac{\alpha^2}{8},$$

οπότε

$$(A\Delta\Gamma) = (AB\Gamma) + (B\Delta\Gamma) - (AB\Delta) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2(2\sqrt{3}+1)}{8}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

Λύση

Έστω ότι γίνεται. Ονομάζουμε x τον κοινό χρόνο που έπαιξε ο κάθε ποδοσφαιριστής, όπου x είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε ο συνολικός χρόνος που έπαιξαν όλοι οι ποδοσφαιριστές είναι $16x$. Όμως κάθε στιγμή υπάρχουν 11 ποδοσφαιριστές, άρα ο συνολικός χρόνος που παίζουν οι ποδοσφαιριστές σε έναν αγώνα είναι $90 \cdot 11$. Συνεπώς πρέπει $16x = 90 \cdot 11$, που δίνει $x = \frac{90 \cdot 11}{16} = \frac{45 \cdot 11}{8}$, που δεν είναι ακέραιος. Συνεπώς δεν είναι δυνατό όλοι οι παίκτες να παίξουν τον ίδιο ακέραιο αριθμό λεπτών.

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) ακεραίων αριθμών που είναι τέτοιες ώστε

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 12z + 6 = 0$$

Λύση

Γράφουμε την δοθείσα στη μορφή

$$\begin{aligned}(x^2 - 4x + 4) + (4y^2 - 4y + 1) + (9z^2 + 12z + 4) &= 3 \Leftrightarrow \\(x-2)^2 + (2y-1)^2 + (3z+2)^2 &= 3\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε το άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων να ισούται με τρία. Η μόνη περίπτωση να ισχύει αυτό είναι να έχουμε $(x-2)^2 = (2y-1)^2 = (3z+2)^2 = 1$.

Άρα έχουμε

$$\begin{cases} x-2=1 \text{ ή } x-2=-1 \\ 2y-1=1 \text{ ή } 2y-1=-1 \\ 3z+2=1 \text{ ή } 3z+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ή } x=1 \\ y=1 \text{ ή } y=0 \\ z=-1/3 \text{ (απορρίπτεται) ή } z=-1 \end{cases}$$

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες είναι οι $(3, 1, -1), (1, 1, -1), (3, 0, -1), (1, 0, -1)$.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε θετικό ακέραιο A χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο A που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό A μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 9 όσες φορές θέλουμε, έστω $k \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $k=0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 9 όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Ο αριθμός που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής πολ.3+1, οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επίσης, για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4. Επειδή το 4 δεν διαιρεί ούτε το 49 ούτε το 94, ο αριθμός Α δεν μπορεί να διαιρείται με το 4. Επομένως ο Α δεν μπορεί να διαιρείται και με το 8, αφού τότε θα έπρεπε να διαιρείται και με το 4. Επομένως έξι από τους αριθμούς 2,3,..., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.

Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,7. Για να διαιρείται με το 2 πρέπει το τελευταίο ψηφίο του Α να είναι το 4. Επειδή ο 94 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον αριθμό 994 ο οποίος διαιρείται και με το 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 4

Στη πλευρά $B\Gamma$ ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$, θεωρούμε σημείο M (διαφορετικό από το μέσο της $B\Gamma$) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στη $B\Gamma$. Ο κύκλος C_1 (που έχει κέντρο το μέσο K του MB και ακτίνα KB) τέμνει την AB στο Δ . Ο κύκλος C_2 (που έχει κέντρο το μέσο Λ του $M\Gamma$ και ακτίνα $\Lambda\Gamma$) τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Οι ευθείες $K\Delta$ και ΛE τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Π και P αντίστοιχα. Αν τέλος οι ευθείες $K\Delta$ και ΛE τέμνονται στο σημείο T , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο PPT είναι ισόπλευρο και να υπολογίσετε το εμβαδό του συναρτήσει του μήκους α της πλευράς $B\Gamma$.

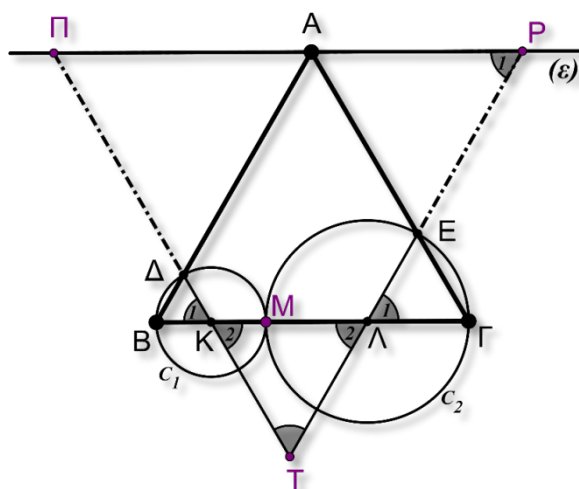
Λύση

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $TK\Lambda$ είναι ισόπλευρο. Το τρίγωνο $KB\Delta$ είναι ισοσκελές (διότι $K\Delta, KB$ ακτίνες του κύκλου C_1). Επειδή όμως $\hat{B} = 60^\circ$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $KB\Delta$ είναι (τελικά) ισόπλευρο.

Οπότε $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 60^\circ$.

Όμοια καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2 = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο $K\Lambda E$ είναι ισόπλευρο και κάθε πλευρά έχει μήκος:

$$K\Lambda = MK + M\Lambda = \frac{MB}{2} + \frac{M\Gamma}{2} = \frac{MB + M\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$



Σχήμα 3

Εφόσον $AP \parallel BG$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{P}_1 = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο $TP\Pi$ είναι ισόπλευρο (διότι και $\hat{T} = 60^\circ$).

Το τετράπλευρο $APAB$ είναι παραλληλόγραμμο (διότι $\hat{B} = \hat{A}_1 = \hat{P}_1 = 60^\circ$).

Άρα το τρίγωνο $TP\Pi$ είναι ισόπλευρο με μήκος πλευράς:

$$TP = T\Lambda + \Lambda P = T\Lambda + AB = \frac{\alpha}{2} + \alpha = \frac{3\alpha}{2}.$$

Το εμβαδό του τριγώνου $TP\Pi$ είναι:

$$(TP\Pi) = \frac{\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\alpha^2 \sqrt{3}}{16}.$$

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι ρίζα και της εξίσωσης

$$x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Λύση

Εφόσον ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, θα είναι $\rho \neq 0$ και ισχύει:

$$\rho^3 - \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^3 = \rho + 1 \quad (1).$$

$$\text{Άρα } (\rho^3)^3 = (\rho + 1)^3 \Leftrightarrow \rho^9 = \underbrace{\rho^3}_{\rho+1} + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \rho^9 = \rho + 1 + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \Leftrightarrow \rho^9 = 3\rho^2 + 4\rho + 2 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \rho^9 \cdot \rho = (3\rho^2 + 4\rho + 2) \cdot \rho \Leftrightarrow \rho^{10} = 3 \cdot \rho^3 + 4\rho^2 + 2\rho \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^{10} = 4\rho^2 + 5\rho + 3.$$

(*) ισχύει $\rho \neq 0$.

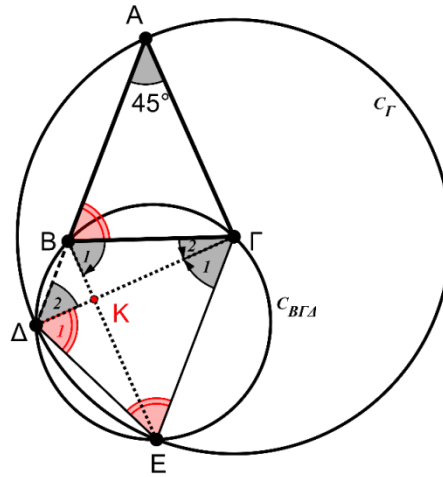
Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 45^\circ$. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, \Gamma A)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA) τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Δ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ (έστω $C_{B\Gamma\Delta}$) τέμνει τον C_Γ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

Λύση

Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, διότι ΓA και $\Gamma\Delta$ είναι ακτίνες του κύκλου C_Γ . Άρα:

$$\hat{A} = \hat{\Delta}_2 = 45^\circ \quad (1)$$



Σχήμα 4

Το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, διότι ΓΕ και ΓΔ είναι ακτίνες του κύκλου C_G . Άρα:

$$\hat{E} = \hat{\Delta}_1 \quad (2)$$

Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο C_G . Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{B}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{E}$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{B} = 67,5^\circ \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε: $\hat{A} = \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$.

Άρα $BD \parallel GE$, οπότε το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ορθογώνιο.

Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί $BE = \Delta\Gamma$ (διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου) και $\Gamma\Delta = \Gamma E$ (ακτίνες του C_G). Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα.

Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 67,5^\circ$ και επειδή $\hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$, καταλήγουμε $\hat{\Gamma}_2 = 22,5^\circ$ και κατά συνέπεια $\hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 67,5^\circ + 22,5^\circ = 90^\circ$.

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι, για κάθε $n \geq 2$, ο αριθμός

$$A = \frac{n^7 + n^6 + n^5 + 1}{n^2 + 1}$$

είναι σύνθετος.

Λύση

Ο αριθμητής του κλάσματος παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} n^7 + n^6 + n^5 + 1 &= n^5(n^2 + 1) + ((n^2)^3 + 1) = n^5(n^2 + 1) + (n^2 + 1)(n^4 - n^2 + 1) \\ &= (n^2 + 1)(n^5 + n^4 - n^2 + 1) = (n^2 + 1)[n^4(n + 1) - (n + 1)(n - 1)] \\ &= (n^2 + 1)(n + 1)(n^4 - n + 1). \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$A = \frac{n^7 + n^6 + n^5 + 1}{n^2 + 1} = (n + 1)(n^4 - n + 1).$$

Για $v \geq 2$ είναι $v+1 \geq 3$ και $v^4 - v + 1 = v(v^3 - 1) + 1 \geq 2 \cdot 7 + 1 = 15$, οπότε ο ακέραιος A είναι σύνθετος.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μήκους της διαγωνίου του;

Λύση

Έστω x, y τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αφού η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του θα έχουμε ότι $xy = 2(x + y)$ (1). Το μήκος της διαγωνίου είναι $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Οπότε θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη τιμή του d υπό τη συνθήκη (1).

Έχουμε ότι $d^2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \stackrel{(1)}{=} (x + y)^2 - 4(x + y)$.

Ισχύει ότι $(x + y)^2 \geq 4xy$ (αφού είναι ισοδύναμη με $(x - y)^2 \geq 0$) και λόγω της (1) έχουμε ότι $4xy = 8(x + y)$, άρα $(x + y)^2 \geq 8(x + y)$, οπότε $x + y \geq 8$. (2)

Θέτουμε $x + y = t$ και τότε $d^2 = t^2 - 4t = (t - 2)^2 - 4 \stackrel{(2)}{\geq} (8 - 2)^2 - 4 = 32$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του μήκους της διαγωνίου είναι $\sqrt{32}$, και επιτυγχάνεται στο τετράγωνο πλευράς 4.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$f(a) = 0 \text{ και } f(f(x)) = xf(x) + a, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του a και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Λύση

Θέτοντας $x = a$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(f(a)) = af(a) + a \Rightarrow f(0) = a.$$

Για $x = 0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε: $f(f(0)) = 0 \cdot f(0) + a \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(a) = a$, οπότε από τη σχέση $f(a) = 0$ έπεται ότι $a = 0$.

Για $a = 0$ πρέπει να υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(f(x)) = xf(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να βρεθεί, αν αναζητήσουμε συνάρτηση της μορφής $f(x) = x^c$, $c \in \mathbb{R}$. Τότε πρέπει να ισχύει:

$$f(x^c) = x \cdot x^c \Rightarrow (x^c)^c = x^{c+1} \Rightarrow x^{c^2} = x^{c+1} \Rightarrow c^2 = c + 1 \Rightarrow c^2 - c - 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Άρα μία συνάρτηση είναι η } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

Πρόβλημα 2

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^7 + x^6 + x^5 + 1 = 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} x^7 + x^6 + x^5 + 1 &= x^5(x^2 + 1) + ((x^2)^3 + 1) = x^5(x^2 + 1) + (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x^5 + x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + 1)[x^4(x+1) - (x+1)(x-1)] \\ &= (x^2 + 1)(x+1)(x^4 - x + 1). \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο $x^2 + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επίσης, αν το πολυώνυμο $x^4 - x + 1$ είχε πραγματική ρίζα, τότε θα υπήρχε $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\alpha^4 - \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^3 - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) + 1 = 0.$$

Όμως για $\alpha \leq 0$ ή $\alpha \geq 1$ η παράσταση $f(\alpha) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$ είναι μη αρνητική, οπότε $f(\alpha) + 1 > 0$.

Για $0 < \alpha < 1$ είναι $\alpha^4 > 0$, $-\alpha + 1 > 0$ και $\alpha^4 - \alpha + 1 > 0$. Επομένως η υπόθεση που κάναμε παραπάνω δεν μπορεί να ισχύει.

Επομένως έχουμε

$$x^7 + x^6 + x^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x+1)(x^4 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 36^\circ$. Ο κύκλος $C_1(\Gamma, \Gamma A)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA) τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Δ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ (έστω C_2) τέμνει τον C_1 στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι AE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και ότι η $\Delta\Gamma$ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, διότι ΓA και $\Gamma\Delta$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1 . Άρα:

$$\hat{A} = \hat{\Delta}_1 \quad (1).$$

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές, διότι ΓE και $\Gamma\Delta$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1 . Άρα:

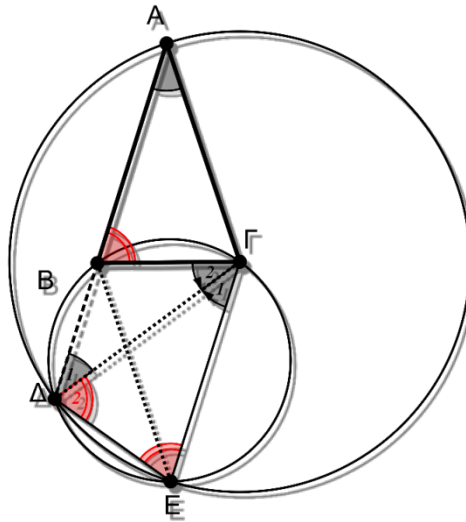
$$\hat{E} = \hat{\Delta}_2 \quad (2).$$

Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο C_2 . Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{B}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{E}$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{B} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε: $\hat{A} = \hat{\Delta}_1 = \hat{E} = 36^\circ$.

Άρα $B\Delta \parallel \Gamma E$, οπότε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια οι διαγώνιές του (BE και $\Gamma\Delta$) θα είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές. Δηλαδή τα σημεία E και A ανήκουν στη μεσοκάθετη της βάσης $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ οπότε η AE θα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.



Σχήμα 5

Από την παραλληλία $B\Delta \parallel \Gamma E$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{B} = B\hat{\Gamma}E = 72^\circ$, οπότε τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $EB\Gamma$ είναι ίσα.

Επειδή όμως $\hat{A} = \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 36^\circ$ και η $\hat{\Gamma}_2$ σχηματίζεται από τη $B\Gamma, \Delta\Gamma$ (χορδή και εφαπτομένη) συμπεραίνουμε ότι η $\Delta\Gamma$ θα είναι εφαπτομένη.

Πρόβλημα 4

Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $9^{8^{8^9}}$, $8^{9^{9^8}}$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Αφού $9 > 8$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$8^{8^9} > 9^{9^8} \Leftrightarrow \left(8^{8^9}\right)^{\frac{1}{9^8}} > \left(9^{9^8}\right)^{\frac{1}{9^8}} \Leftrightarrow 8^{\frac{8^9}{9^8}} > 9 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[8^{\frac{8^9}{9^8}}]{8^{\frac{8^9}{9^8}}} > 3 \Leftrightarrow 8^{4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3 \Leftrightarrow 4^{6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3$$

Τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^8 > 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 \cdot 2^{24} > 3^{16} \Leftrightarrow 2^{25} > 3^{15} \Leftrightarrow 2^5 > 3^3$,

που ισχύει, οπότε ισχύει και η αρχική.

2^{ος} τρόπος. Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Λόγω της μονοτονίας του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι $8^{8^9} \ln 9 > 9^{9^8} \ln 8$. Χρησιμοποιώντας δεύτερη φορά τη μονοτονία του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(8^{8^9} \ln 9\right) > \ln\left(9^{9^8} \ln 8\right) \Leftrightarrow 8^9 \ln 8 + \ln(\ln 9) > 9^8 \ln 9 + \ln(\ln 8).$$

Αφού $\ln(\ln 9) > \ln(\ln 8)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$8^9 \ln 8 > 9^8 \ln 9 \Leftrightarrow \frac{8^9}{9^8} > \frac{\ln 9}{\ln 8} \Leftrightarrow \frac{2^{27}}{3^{16}} > \frac{2 \ln 3}{3 \ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^{26}}{3^{15}} > \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 > \frac{\ln 3}{\ln 2}$, η οποία θα δώσει το ζητούμενο. Πράγματι, η δεξιά ανισότητα προκύπτει άμεσα αφού $2 \ln 2 = \ln 4 > \ln 3$.

Από την άλλη αρκεί $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 \Leftrightarrow \frac{2^{25}}{3^{15}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2^5}{3^3}\right)^5 > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{32}{27}\right)^5 > 1$, που ισχύει.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-8)^3}{2^3} + \frac{(-12)^3}{(-3)^3} + 10 \right) \cdot \left(\frac{(-8)^2}{2^2} + \frac{(-12)^2}{(-3)^2} - 22 \right).$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-8)^3}{2^3} + \frac{(-12)^3}{(-3)^3} + 10 \right) \cdot \left(\frac{(-8)^2}{2^2} + \frac{(-12)^2}{(-3)^2} - 22 \right) \\ &= \left(\left(\frac{-8}{2} \right)^3 + \left(\frac{-12}{-3} \right)^3 + 10 \right) \cdot \left(\left(\frac{-8}{2} \right)^2 + \left(\frac{-12}{-3} \right)^2 - 22 \right) \\ &= \left((-4)^3 + (+4)^3 + 10 \right) \cdot \left((-4)^2 + (+4)^2 - 22 \right) \\ &= (-4^3 + 4^3 + 10) \cdot (16 + 16 - 22) = 10 \cdot 10 = 100. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές (AB = ΑΓ) με $\hat{A} = 40^\circ$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επίσης τα τρίγωνα ABE και ABH είναι ισοσκελή με EA = EB και AB = AH.

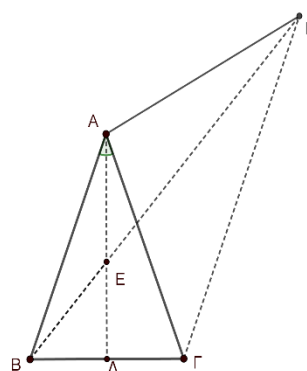
Να αποδείξετε ότι:

(α) $\hat{AHB} = 20^\circ$,

(β) $\hat{A\Gamma H} = 40^\circ$,

(γ) η BH είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\Gamma H}$.

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.



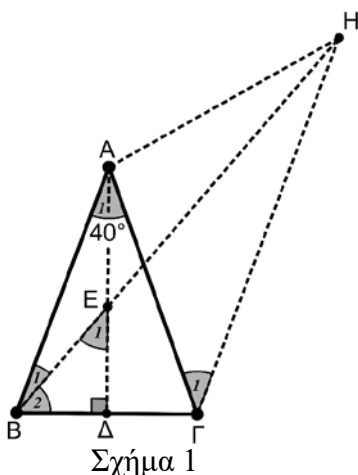
Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 40^\circ$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, θα είναι $\hat{A_1} = \hat{BAE} = 20^\circ$. Επειδή το τρίγωνο AEB είναι ισοσκελές,

(β) Επειδή το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές με $\hat{A}HB = \hat{B}_1 = 20^\circ$ θα είναι

Όμως έχουμε ότι:

Επειδή $ΑΓ = ΑΒ = ΑΗ$, το τρίγωνο $ΓΑΗ$ είναι ισοσκελές, οπότε



(γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε ότι $\widehat{A\hat{H}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Gamma}H} = 40^\circ$, ενώ από το ερώτημα (γ) έχουμε ότι $\widehat{A\hat{H}B} = 20^\circ$, Επομένως θα έχουμε

δηλαδή $\hat{B}\hat{H}\Gamma = \hat{A}\hat{H}B = 20^\circ$, οπότε η ΒΗ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΑΗΓ.

Ο Νίκος επισκέφθηκε για ψώνια 3 καταστήματα στη σειρά. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε 30 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που είχε μαζί του. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε 40 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το πρώτο κατάστημα. Στο τρίτο κατάστημα ξόδεψε 50 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το δεύτερο κατάστημα. Αν μετά την αγορά του στο τρίτο κατάστημα τελείωσαν τα χρήματά του, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε τις αγορές του.

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο τρίτο κατάστημα είχε x ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 50 ευρώ και δεν του έμειναν καθόλου χρήματα. Επομένως ξόδεψε όσα χρήματα του είχαν απομείνει και έχουμε την εξίσωση:

Επομένως, όταν έφυγε από το δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 100 ευρώ.

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο δεύτερο κατάστημα είχε y ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 40 ευρώ και του έμειναν 100 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$y = \frac{y}{2} + 40 + 100 \Leftrightarrow y - \frac{y}{2} = 100 + 40 \Leftrightarrow \frac{y}{2} = 140 \Leftrightarrow y = 280.$$

Επομένως όταν πήγε στο δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 280 ευρώ.

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο πρώτο κατάστημα είχε z ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 30 ευρώ και του έμειναν 280 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$z = \frac{z}{2} + 30 + 280 \Leftrightarrow z - \frac{z}{2} = 280 + 30 \Leftrightarrow \frac{z}{2} = 310 \Leftrightarrow z = 620.$$

Επομένως όταν πήγε στο πρώτο κατάστημα είχε μαζί του 620 ευρώ.

Πρόβλημα 4

Τρεις θετικοί ακέραιοι α, β και γ , με $\alpha < \beta < \gamma$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον ακέραιο 72 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τον ακέραιο 1008. Αν γνωρίζετε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β ισούται με το μέγιστο κοινό διαιρέτη των β, γ , να βρείτε τις δυνατές τιμές των α, β, γ .

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση οι αριθμοί α, β και γ είναι διαφορετικά πολλαπλάσια του 72. Επομένως, θα είναι της μορφής

$$\alpha = 72\kappa, \beta = 72\lambda, \gamma = 72\mu \quad (\text{όπου } \kappa, \lambda, \mu \text{ διαφορετικοί ανά δύο με } \kappa < \lambda < \mu).$$

Επειδή πρέπει οι αριθμοί α, β και γ να είναι και διαιρέτες του $1008 = 14 \cdot 72$, πρέπει τα κλάσματα

$$\frac{1008}{72\kappa} = \frac{72 \cdot 14}{72\kappa} = \frac{14}{\kappa}, \quad \frac{1008}{72\lambda} = \frac{72 \cdot 14}{72\lambda} = \frac{14}{\lambda}, \quad \frac{1008}{72\mu} = \frac{72 \cdot 14}{72\mu} = \frac{14}{\mu},$$

να είναι ακέραιοι, δηλαδή πρέπει οι διαφορετικοί ανά δύο ακέραιοι κ, λ, μ να είναι διαιρέτες του 14. Επομένως οι δυνατές τιμές τους είναι 1, 2, 7 και 14.

Λόγω της προϋπόθεσης $\kappa < \lambda < \mu$ οι δυνατές τιμές για την τριάδα (κ, λ, μ) είναι: $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 7)$ ή $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 14)$ ή $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 7, 14)$ ή $(\kappa, \lambda, \mu) = (2, 7, 14)$.

Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 7)$, τότε $\alpha = 72, \beta = 144, \gamma = 504$, η οποία είναι δεκτή, γιατί $\text{MKΔ}(\alpha, \beta) = \text{MKΔ}(\beta, \gamma) = 72$.
- Αν είναι $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 2, 14)$, τότε $\alpha = 72, \beta = 144, \gamma = 1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{MKΔ}(\alpha, \beta) = 72 \neq 144 = \text{MKΔ}(\beta, \gamma)$.
- Αν είναι $(\kappa, \lambda, \mu) = (1, 7, 14)$, τότε $\alpha = 72, \beta = 504, \gamma = 1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{MKΔ}(\alpha, \beta) = 72 \neq 504 = \text{MKΔ}(\beta, \gamma)$.
- Αν είναι $(\kappa, \lambda, \mu) = (2, 7, 14)$, τότε $\alpha = 144, \beta = 504, \gamma = 1008$ που δεν είναι δεκτή γιατί $\text{MKΔ}(\alpha, \beta) = 72 \neq 504 = \text{MKΔ}(\beta, \gamma)$.

Επομένως, οι δυνατές τιμές είναι $\alpha = 72, \beta = 144, \gamma = 504$.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}} + \frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}} \right) \cdot (-2018)^2 + \left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{-20} \right) + 200.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}} + \frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}} \right) \cdot (-2018)^2 + \left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{-20} \right) + 200 \\ &= \left(\left(\frac{-20}{4} \right)^{11} + \left(\frac{-25}{-5} \right)^{11} \right) \cdot (-2018)^2 + \left(\left(\frac{-8}{2} \right)^{20} - \left(\frac{4}{1} \right)^{20} \right) + 200 \\ &= \left((-5)^{11} + (+5)^{11} \right) \cdot (-2018)^2 + \left((-4)^{20} - 4^{20} \right) + 200 \\ &= (-5^{11} + 5^{11}) \cdot (-2018)^2 + (4^{20} - 4^{20}) + 200 = 0 \cdot (-2018)^2 + 0 + 200 = 200. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: Ο μέσος όρος n αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι ο αριθμός $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$.

Λύση

Ονομάζουμε A το βάρος σε γραμμάρια του πρώτου μήλου, B του δεύτερου, Γ του τρίτου και Δ του τέταρτου. Τότε είναι $A = 120$ γραμμάρια και

$$\frac{A+B}{2} = 115 \Leftrightarrow A+B = 230 \Leftrightarrow 120+B = 230 \Leftrightarrow B = 230-120 = 110.$$

Άρα το δεύτερο μήλο ήταν 110 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τρίτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{A+B+\Gamma}{3} = 115-10 \Leftrightarrow \frac{A+B+\Gamma}{3} = 105 \Leftrightarrow A+B+\Gamma = 315 \Leftrightarrow \Gamma = 315-(A+B)$$

$$\Leftrightarrow \Gamma = 315-(120+110) \Leftrightarrow \Gamma = 315-230 = 85.$$

Άρα το τρίτο μήλο ήταν 85 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τέταρτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta}{4}=105-10 \Leftrightarrow \frac{A+B+\Gamma+\Delta}{4}=95 \Leftrightarrow A+B+\Gamma+\Delta=380$$

$$\Leftrightarrow \Delta=380-(A+B+\Gamma) \Leftrightarrow \Delta=380-(120+110+85) \Leftrightarrow \Delta=380-315=65.$$

Επομένως το τέταρτο μήλο ήταν 65 γραμμάρια.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου α , για τις οποίες η εξίσωση $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-\alpha}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις.

Λύση

Πρέπει $x \neq 2$ και $x \neq 6$. Με απαλοιφή των παρονομαστών παίρνουμε ότι:

$$(x-1)(x-6) = (x-2)(x-\alpha) \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = x^2 - (2+\alpha)x + 2\alpha \Leftrightarrow (\alpha-5)x = 2\alpha - 6$$

Επομένως για $\alpha \neq 5$ έχουμε

$$x = \frac{2\alpha - 6}{\alpha - 5} = \frac{2(\alpha - 5) + 4}{\alpha - 5} = 2 + \frac{4}{\alpha - 5}.$$

Για να είναι ακέραιος ο αριθμός αυτός, θα πρέπει ο παρονομαστής $(\alpha - 5)$ να είναι διαιρέτης του 4, οπότε $\alpha - 5 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Επομένως $\alpha \in \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$.

Για τις παραπάνω τιμές προκύπτουν οι λύσεις $x = 1, 0, -2, 6, 4, 3$, από τις οποίες η $x = 6$ πρέπει να εξαιρεθεί λόγω των περιορισμών. Επομένως οι ζητούμενες τιμές του α είναι: 1, 3, 4, 7, 9.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 40^\circ$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: $\Delta A = \Delta B = \Delta \Gamma$.

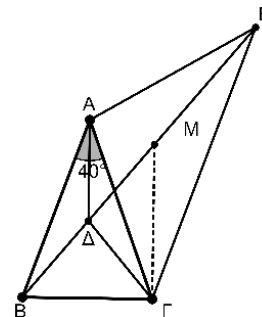
Αν η ΓM είναι παράλληλη στην $A\Delta$ και το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($AB = AE$), να αποδείξετε ότι:

(α) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

(β) $\hat{\Gamma A E} = 100^\circ$.

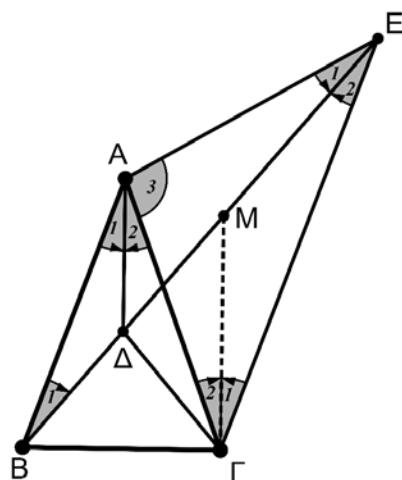
(γ) η AM είναι κάθετη στην ΓE .

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.



Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές ($\Delta B = \Delta \Gamma$), το σημείο Δ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$. Η κορυφή A ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη της $B\Gamma$ (διότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές). Άρα η $A\Delta$ είναι η μεσοκάθετη της $B\Gamma$ και κατά συνέπεια θα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές ($ΔΑ=ΔΒ$) και $\widehat{A}_1 = 20^\circ$, θα ισχύει $\widehat{B}_1 = 20^\circ$. Το τρίγωνο $ΑΒΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20^\circ$ και από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 20^\circ + 20^\circ + \widehat{A}_3 + 20^\circ + 20^\circ = 180^\circ.$$

Άρα είναι: $\widehat{A}_3 = 100^\circ$.

(γ) Το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές ($ΑΕ = ΑΓ$) με $\widehat{ΓΑΕ} = \widehat{A}_3 = 100^\circ$, οπότε:

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{Γ}_1 + \widehat{Γ}_2 = 40^\circ.$$

Ισχύει όμως $\widehat{Γ}_2 + \widehat{A}_2 = 20^\circ$ (διότι $\widehat{Γ}_2, \widehat{A}_2$ εντός εναλλάξ $ΑΔ \parallel ΓΜ$ και $ΑΓ$ τέμνουσα).

Στο ερώτημα (β) είδαμε ότι $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20^\circ$. Άρα $\widehat{Γ}_1 = \widehat{E}_2 = 20^\circ$, οπότε το τρίγωνο $ΓΜΕ$ είναι ισοσκελές με $ΜΓ = ΜΕ$. Επομένως, το $Μ$ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης $ΓΕ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΓΕ$, όπως και το $Α$, οπότε θα είναι $ΑΜ \perp ΓΕ$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x που ικανοποιούν συγχρόνως την εξίσωση

$$(x-1)(x^2-7x+10)=0 \text{ και την ανίσωση } \frac{x(x-1)}{2}-2 < \frac{x(x-5)}{2}+6.$$

Λύση

Θα λύσουμε την εξίσωση και την ανίσωση και θα επιλέξουμε τους ακέραιους που ικανοποιούν και τις δύο. Για την εξίσωση έχουμε:

$$(x-1)(x^2-7x+10)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=5,$$

αφού η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι $\Delta=(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10=9>0$.

Για την ανίσωση έχουμε

$$\frac{x(x-1)}{2}-2 < \frac{x(x-5)}{2}+6 \Leftrightarrow x^2-x-4 < x^2-5x+12.$$

$$\Leftrightarrow 5x-x < 12+4 \Leftrightarrow 4x < 16 \Leftrightarrow x < 4.$$

Επομένως, η εξίσωση και η ανίσωση αληθεύουν συγχρόνως για $x=1$ ή $x=2$.

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\frac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1$, να βρείτε τις

δυνατές τιμές της παράστασης

$$K = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}.$$

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση έχουμε ότι:

$$\alpha^4-36\beta^4=5\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=0. \quad (1)$$

Για να προκύψει απλούστερη σχέση μεταξύ των α, β πρέπει να γίνει παραγοντοποίηση της παράστασης $\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο προσπαθούμε να χωρίσουμε την παράσταση σε ομάδες με κατάλληλη διάσπαση ενός όρου της σε δύο. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4 &= \alpha^4-9\alpha^2\beta^2+4\alpha^2\beta^2-36\beta^4 = \alpha^2(\alpha^2-9\beta^2)+4\beta^2(\alpha^2-9\beta^2) \\ &= (\alpha^2-9\beta^2)(\alpha^2+4\beta^2) \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=0 &\Leftrightarrow (\alpha^2-9\beta^2)(\alpha^2+4\beta^2)=0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2-9\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=3\beta \text{ ή } \alpha=-3\beta. \end{aligned}$$

Αν $\alpha=3\beta$, τότε $K = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{3\beta-\beta}{3\beta+\beta} = \frac{1}{2}$, ενώ

Αν $\alpha=-3\beta$, τότε $K = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \frac{-3\beta-\beta}{-3\beta+\beta} = \frac{-4}{-2} = 2$.

Στο δεύτερο τρόπο διαιρούμε την παράσταση με β^4 (αν είναι $\beta=0$, τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται $0=1$, άτοπο), οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha^4 - 5\alpha^2\beta^2 - 36\beta^4 = 0 \Leftrightarrow \beta^4 \left(\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^4 - 5 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - 36 \right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^4 - 5 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 - 36 = 0$$

$$\stackrel{\frac{\alpha}{\beta}=\omega}{\Leftrightarrow} \omega^4 - 5\omega^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow (\omega^2)^2 - 5\omega^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = 9 \text{ ή } \omega^2 = -4 \text{ (απορρίπτεται)} \Leftrightarrow \omega = 3 \text{ ή } \omega = -3 \Leftrightarrow \alpha = 3\beta \text{ ή } \alpha = -3\beta.$$

Επομένως έχουμε, όπως και στον πρώτο τρόπο:

$$\text{Αν } \alpha = 3\beta, \text{ τότε } K = \frac{3\beta - \beta}{3\beta + \beta} = \frac{1}{2}, \text{ ενώ, αν } \alpha = -3\beta, \text{ τότε } K = \frac{-3\beta - \beta}{-3\beta + \beta} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Πρόβλημα 3

Να συγκριθούν οι αριθμοί

$$A = \frac{2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{99}$$

και

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{95} + \frac{1}{97} + \frac{1}{98} + \frac{1}{100}$$

Λύση

Παρατηρώντας προσεκτικά τους αριθμούς A και B διαπιστώνουμε ότι:

οι προσθετέοι του A είναι της μορφής $\frac{2}{3\kappa}$, $\kappa = 1, 2, \dots, 33$, δηλαδή ο A έχει 33 όρους.

Επίσης διαπιστώνουμε ότι ο B έχει προσθετέους της μορφής $\frac{1}{\nu}$, όπου το ν παίρνει

όλες τις τιμές από το 2 μέχρι το 100, εκτός αυτών που είναι πολλαπλάσια του 3, δηλαδή ο B έχει $99 - 33 = 66$ όρους, δηλαδή έχει διπλάσιους όρους από τον αριθμό A. Επομένως πρέπει να βρούμε μία ανισωτική σχέση μεταξύ των όρων του A και των όρων του B η οποία σε κάθε όρο του A θα αντιστοιχίζει δύο όρους του B. Με απλή παρατήρηση βλέπουμε ότι πρέπει να βρούμε τη σχέση μεταξύ του όρου $\frac{2}{3\kappa}$ του A και

του αθροίσματος των όρων $\frac{1}{3\kappa-1}$ και $\frac{1}{3\kappa+1}$ του B, για $\kappa = 1, 2, \dots, 33$.

Επειδή βλέπουμε ότι $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\frac{1}{3\kappa-1} + \frac{1}{3\kappa+1} > \frac{2}{3\kappa},$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, \dots, 33$. Πράγματι, κάνοντας την πρόσθεση στο πρώτο μέλος, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{6\kappa}{9\kappa^2 - 1} > \frac{2}{3\kappa}$$

ή ισοδύναμα $18\kappa^2 > 18\kappa^2 - 2$, που ισχύει για κάθε $\kappa = 1, 2, \dots, 33$

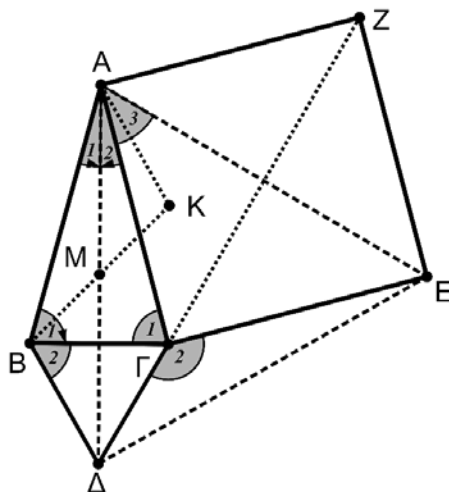
Επομένως, έχουμε τις 33 ομόστροφες ανισότητες:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{2}{3}, \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{2}{6}, \dots, \frac{1}{98} + \frac{1}{100} > \frac{2}{99},$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε ότι $B > A$.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{A} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ και τετράγωνο ΑΓΕΖ. Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΔ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς το σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
β) Οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το ίδιο σημείο.



Σχήμα 3

Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^\circ$ θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 75^\circ$. Η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος της $B\Gamma$, οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A} = 30^\circ$, οπότε θα είναι: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 15^\circ$.

Συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ. Αυτά έχουν από τις υποθέσεις:

(i) $AB=AG=GE$ **(ii)** $B\Delta=\Gamma\Delta$ και επιπλέον για τις περιεχόμενες γωνίες έχουμε:

$$A\hat{B}\Delta = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \text{ και}$$

$$\Delta \hat{\Gamma}E = 360^\circ - \hat{\Gamma}_1 - 90^\circ - 60^\circ = 360^\circ - 150^\circ - 75^\circ = 135^\circ,$$

δηλαδή ισχύει ότι: **(iii)** $\widehat{A\hat{B}\Delta} = \widehat{\Delta\hat{\Gamma}E} = 135^\circ$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ είναι ίσα και κατά συνέπεια $ΑΔ = ΔΕ$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Για τη γωνία $\widehat{Δ\hat{A}Ε}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

$$\Delta \hat{A}E = \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ,$$

αφού η γωνία $\hat{A}_3$ είναι οξεία γωνία του ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ.

Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

(β) Για τη γωνία $\Delta\hat{\Gamma}Z$ έχουμε: $\Delta\hat{\Gamma}Z = \hat{\Gamma}_2 + E\hat{\Gamma}Z = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$. Άρα τα σημεία Δ, Γ, Z είναι συνευθειακά και επειδή η ΓZ είναι μεσοκάθετη της AE , συμπεραίνουμε ότι η ΔZ είναι μεσοκάθετη της AE .

Επειδή το Μ είναι μέσο της ΑΔ, και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο, **η ΕΜ θα είναι μεσοκάθετη της ΑΔ**.

Εφόσον το Κ είναι το συμμετρικό του Β ως προς το Μ, $ΜΑ=ΜΒ$ και $Β\hat{Μ}Δ = Α\hat{Μ}Κ$ τα τρίγωνα ΜΑΚ και ΜΔΒ είναι ίσα, οπότε $Β\hat{Δ}Μ = Μ\hat{Α}Κ = 30^\circ$. Από τις προηγούμενες ισότητες, συμπεραίνουμε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη του τριγώνου ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΕ .

Επομένως, οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το σημείο τομής των μεσοκάθετων του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΕ.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\frac{26\alpha^3\beta^3}{\alpha^6 - 27\beta^6} = -1$, να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση έχουμε ότι:

$$\alpha^6 - 27\beta^6 = -26\alpha^3\beta^3 \Leftrightarrow \alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = 0. \quad (1)$$

Για να προκύψει απλούστερη σχέση μεταξύ των α, β πρέπει να γίνει παραγοντοποίηση της παράστασης $\alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο προσπαθούμε να χωρίσουμε την παράσταση σε ομάδες με κατάλληλη διάσπαση ενός όρου της σε δύο. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 &= \alpha^6 - \alpha^3\beta^3 + 27\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = \alpha^3(\alpha^3 - \beta^3) + 27\beta^3(\alpha^3 - \beta^3) \\ &= (\alpha^3 + 27\beta^3)(\alpha^3 - \beta^3). \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 &= 0 \Leftrightarrow (\alpha^3 + 27\beta^3)(\alpha^3 - \beta^3) = 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha + 3\beta)(\alpha^2 - 3\alpha\beta + 9\beta^2)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha + 3\beta = 0 \text{ ή } \alpha - \beta = 0 &\Leftrightarrow \alpha = -3\beta \text{ ή } \alpha = \beta, \end{aligned}$$

αφού $\alpha^2 - 3\alpha\beta + 9\beta^2 = \left(\alpha - \frac{3\beta}{2}\right)^2 + \frac{45\beta^2}{4} > 0$, για $\alpha\beta \neq 0$ (ισχύει από την υπόθεση)

και $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3\beta^2}{4} > 0$, για $\alpha\beta \neq 0$.

Αν $\alpha = -3\beta$, τότε $K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{9\beta^2 - \beta^2}{9\beta^2 + \beta^2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, ενώ, αν $\alpha = \beta$, τότε

$$K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\beta^2 - \beta^2}{\beta^2 + \beta^2} = 0.$$

Στο δεύτερο τρόπο διαιρούμε την παράσταση με β^6 (αν είναι $\beta = 0$, τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται $0 = 1$, άτοπο), οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = 0 \Leftrightarrow \beta^6 \left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6 + 26\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 - 27 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6 + 26\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 26\omega - 27 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{-26 \pm \sqrt{784}}{2} = \frac{-26 \pm 28}{2}$$

$$\Leftrightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = -27 \Leftrightarrow \alpha^3 = \beta^3 \text{ ή } \alpha^3 = -27\beta^3 \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -3\beta$$

Επομένως έχουμε, όπως και στον πρώτο τρόπο $K = \frac{4}{5}$ ή $K = 0$.

κύκλος, έστω (c_1) , του τριγώνου ΔO τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο E και το κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο Z . Έστω ότι η ΔZ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο H . Να αποδείξετε ότι:

- (α) Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και $O\Gamma E$ είναι ίσα.
 (β) Τα τρίγωνα OZE και $O\Gamma E$ είναι ίσα.
 (γ) Τα σημεία Γ, O, H είναι συνευθειακά.

Λύση

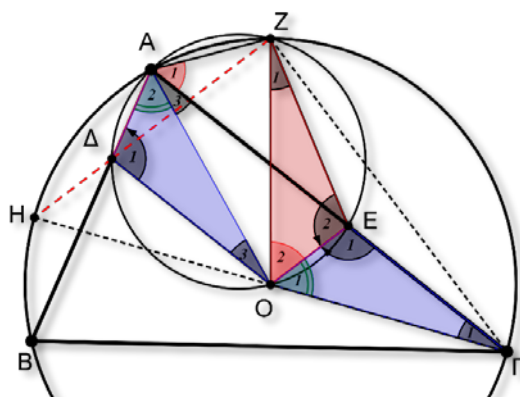
(α) Επειδή $O\Delta \parallel AE$ το τετράπλευρο $\Delta O\Delta E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε $\Delta\Delta = OE$.

Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και $O\Gamma E$ έχουν:

(1) $\Delta\Delta = OE$ (από το ισοσκελές τραπέζιο $\Delta O\Delta E$).

(2) $OA = OG$ (ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$).

(3) Το τρίγωνο OAG είναι ισοσκελές ($OA = OG$) οπότε: $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_3$. Η γωνία $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική στο τετράπλευρο $\Delta O\Delta E$, οπότε: $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών, καταλήγουμε και στην ισότητα: $\hat{O}_1 = \hat{A}_2$



Σχήμα 4

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα των τριγώνων $O\Delta\Delta$ και $O\Gamma E$.

(β) Τα τρίγωνα $O\Gamma E$ και OZE έχουν:

(i) $OZ = OG$ (ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$),

(ii) η OE είναι κοινή πλευρά.

(iii) Ισχύουν η ισότητα γωνιών:

$\hat{A}_1 = \hat{O}_2$ (είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο ZE).

$\hat{A}_1 = \frac{Z\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{\hat{O}_1 + \hat{O}_2}{2}$ (η γωνία $\hat{A}_1$ είναι εγγεγραμμένη και στον περιγεγραμμένο

κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$ με αντίστοιχη επίκεντρη την $\Gamma\hat{O}Z$), οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{O}_2 = \frac{\hat{O}_1 + \hat{O}_2}{2} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2\hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2.$$

Από τις σχέσεις (i), (ii) και (iii) προκύπτει ότι τα τρίγωνα $O\Gamma E$ και OZE είναι ίσα.

(γ) Τελικά, από τις προηγούμενες ισότητες τριγώνων, έχουμε ότι και τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και OZE είναι ίσα, οπότε $O\Delta = OE$. Επομένως το τετράπλευρο $O\Delta ZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και $\Delta Z \parallel OE$.

Από την ισότητα των τριγώνων $O\Gamma E$ και OZE προκύπτουν οι δύο παρακάτω ισότητες τμημάτων $OZ = OG$ και $EZ = EG$, από τις οποίες προκύπτει ότι η OE είναι μεσοκάθετη της ΓZ . Άρα και η ΔZ θα είναι κάθετη στην ΓZ , δηλαδή το σημείο H είναι το αντιδιαμετρικό του σημείου Γ , οπότε τα σημεία Γ, O, H είναι συνευθειακά.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^4 - x^3 - 18x^2 + 3x + 9 = 0.$$

Λύση.

Μία πρώτη παρατήρηση είναι ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ που είναι διαιρέτες του σταθερού όρου δεν ικανοποιούν την εξίσωση. Επομένως πρέπει να εργαστούμε με κατάλληλο μετασχηματισμό και παραγοντοποίηση. Παρατηρούμε ότι το $x = 0$ δεν είναι λύση της εξίσωσης. Για $x \neq 0$ μπορούμε να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με το x^2 , οπότε προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση:

$$x^2 - x - 18 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - \left(x - \frac{3}{x}\right) - 18 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $x - \frac{3}{x} = \omega$, οπότε $x^2 + \frac{9}{x^2} - 6 = \omega^2 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} = \omega^2 + 6$. Με αντικατάσταση

στην (1) έχουμε την εξίσωση

$$\omega^2 + 6 - \omega - 18 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - \omega - 12 = 0 \Leftrightarrow \omega = 4 \text{ ή } \omega = -3.$$

Άρα έχουμε;

$$\begin{aligned} x - \frac{3}{x} = 4 \text{ ή } x - \frac{3}{x} = -3 &\Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \text{ ή } x^2 + 3x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} \text{ ή } x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} &\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{7} \text{ ή } x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Αν ο πενταψήφιος ακέραιος $A = \overline{\alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0} = \alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0$, να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot A$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τη διαφορά $9 \cdot A = 10 \cdot A - A$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 9 \cdot A &= 10 \cdot A - A = \overline{\alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0 0} - \overline{\alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0} \\ &= (\alpha_4 \cdot 10^5 + \alpha_3 \cdot 10^4 + \alpha_2 \cdot 10^3 + \alpha_1 \cdot 10^2 + \alpha_0 \cdot 10) - (\alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0) \\ &= \alpha_4 \cdot 10^5 + (\alpha_3 - \alpha_4) \cdot 10^4 + (\alpha_2 - \alpha_3) \cdot 10^3 + (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot 10^2 + (\alpha_0 - \alpha_1) \cdot 10 - \alpha_0 \\ &= \alpha_4 \cdot 10^5 + (\alpha_3 - \alpha_4) \cdot 10^4 + (\alpha_2 - \alpha_3) \cdot 10^3 + (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot 10^2 + (\alpha_0 - \alpha_1 - 1) \cdot 10 + (10 - \alpha_0) \end{aligned}$$

οπότε, λόγω των υποθέσεων $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0$, ο αριθμός $9 \cdot A$ έχει τα ψηφία $\alpha_4, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_0 - \alpha_1 - 1, 10 - \alpha_0$, τα οποία έχουν άθροισμα ίσο με 9.

Σημείωση: Η αφαίρεση $10 \cdot A - A$ μπορεί να γίνει και κατακόρυφα με το συνήθη τρόπο, αφού λάβουμε υπόψη ότι $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0$, ως εξής:

$$\begin{array}{cccccc}
& & & & 1 & \\
& & & & \alpha_0 & 0 \\
& \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \\
- & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\
\hline
& \alpha_4 & \alpha_3 - \alpha_4 & \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_0 - \alpha_1 - 1 & 10 - \alpha_0,
\end{array}$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Πρόβλημα 3

Αν οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να λύσετε το σύστημα:

$$x + 2y^2 = 3z^3$$

$$y + 2z^2 = 3x^3$$

$$z + 2x^2 = 3y^3$$

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι ο z είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τους άλλους δύο αγνώστους, δηλαδή $z \geq \max\{x, y\}$. (Οι άλλες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται ομοίως).

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $z > 1$. Τότε, αφού $z \geq \max\{x, y\}$, θα είναι $x + 2y^2 < z + 2z^2 < 3z^3$, άτοπο.
- $z = 1$. Τότε $x + 2y^2 = 3$ και αφού $1 \geq \max\{x, y\}$ έπεται ότι η τελευταία ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν $x = y = 1$. Άρα έχουμε τη λύση: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Αυτή είναι η μοναδική λύση του συστήματος, αφού οι περιπτώσεις με $y \geq \max\{x, z\}$ ή $x \geq \max\{y, z\}$ οδηγούν στην ίδια λύση.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ (με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η εφαπτομένη στο B του κύκλου (c) τέμνει την ευθεία $\Delta\Gamma$ στο σημείο E . Έστω M είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- (α) Η ευθεία AD είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου, έστω (c_1) , του τριγώνου ΔBE .
- (β) Το σημείο M ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο, έστω (c_2) , του τριγώνου $OB\Gamma$.
- (γ) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΔBE και $OB\Gamma$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο B .

Λύση

(α) Επειδή το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1, \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Delta}_2.$$

Επίσης, επειδή η BE εφάπτεται στον κύκλο (c), θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (γωνία από τη χορδή $B\Gamma$ και την εφαπτόμενη BE). Άρα έχουμε

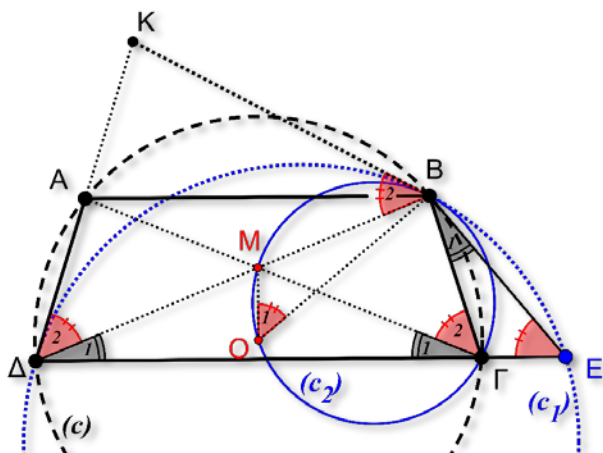
$$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1 \quad (1).$$

Έστω (c_1) και (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΔBE και $OB\Gamma$, αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{\Delta}_2$ (που δημιουργείται από τη

χορδή $B\Delta$ και την $A\Delta$) είναι ίση με την γωνία $\hat{E}$, οπότε η $A\Delta$ θα εφάπτεται στον κύκλο (c_1) . Πράγματι, η γωνία $B\hat{\Gamma}\Delta$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B\Gamma E$, οπότε:

$$B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{B}_1 + \hat{E} \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_1 + \hat{E}$$

και επειδή $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$, καταλήγουμε στις ισότητες: $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Delta}_2 = \hat{E}$.



Σχήμα 5

(β) Θα αποδείξουμε ότι το σημείο τομής M των διαγωνίων του ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ ανήκει στον κύκλο (c_2) . Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma OM$ είναι εγγράψιμο.

Πράγματι, η OM είναι μεσοκάθετος της AB , οπότε:

$$M\hat{O}B = \hat{M}_1 = \frac{A\hat{O}B}{2} = A\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}_2.$$

Επομένως, το τετράπλευρο $B\Gamma OM$ είναι εγγράψιμο.

(γ) Θεωρούμε την εφαπτόμενη του κύκλου (c_1) στο σημείο B και έστω ότι τέμνει την προέκταση της AD στο σημείο K . Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία BK είναι εφαπτομένη και του κύκλου (c_2) .

Πράγματι, έχουμε ότι

$$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 \quad (2)$$

γιατί η $K\Delta$ είναι εφαπτομένη του (c_1) (όπως αποδείξαμε στα ερώτημα (α))

Ισχύουν όμως οι ισότητες γωνιών: $K\hat{B}M = \hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_2 = B\hat{\Gamma}M$. Άρα η BK εφάπτεται και του κύκλου (c_2) .



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5} + \frac{(-12)^5}{6^5} + 1 \right) \cdot \left(\frac{(-16)^3}{8^3} + \frac{(-12)^3}{(-6)^3} + 2019 \right).$$

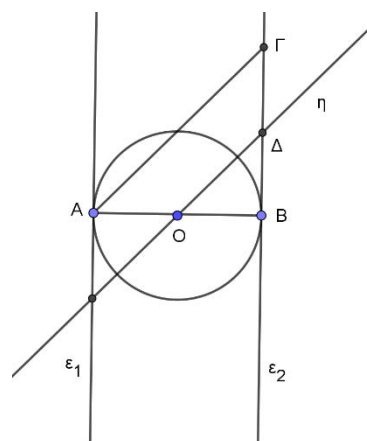
Πρόβλημα 2

Ένας ταξιδιώτης έμεινε σε μία πόλη ένα τριήμερο. Την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει και την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει. Αν στο τέλος της τρίτης μέρας του είχαν μείνει 240 ευρώ, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτης μέρας.

Πρόβλημα 3

Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB , κέντρο O και οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που είναι κάθετες στα άκρα A και B της διαμέτρου AB . Στην ευθεία ε_2 παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ ίσο με τη διάμετρο του κύκλου και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία η να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$. Η ευθεία η τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ στο σημείο Δ .

- (α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες και να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $AB\Gamma$ και $OB\Delta$.
(β) Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$.
(γ) Να εξετάσετε το είδος του τετράπλευρου $AO\Delta\Gamma$.



Πρόβλημα 4

Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9} + \frac{(-16)^9}{(-2)^9} \right) \cdot (-2019)^2 + 20 \right) \cdot \left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}} - \left(-\frac{1}{5} \right)^{-10} + 100 \right).$$

Πρόβλημα 2

Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι ο Γιώργος πριν την τελική φάση του παιχνιδιού έχει κερδίσει 600 ευρώ. Στην τελική φάση πρέπει να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 80 ευρώ, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 40 ευρώ. Αν ο Γιώργος κέρδισε τελικά 1320 ευρώ, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

Πρόβλημα 3

(α) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{2020}{2019}, \frac{2021}{2020}, \frac{2022}{2021}, \frac{3020}{3019}, \frac{3021}{3020}, \frac{3022}{3021},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022}, \frac{4022}{4023}, \frac{5020}{5021}, \frac{5021}{5022}, \frac{5022}{5023},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Πρόβλημα 4

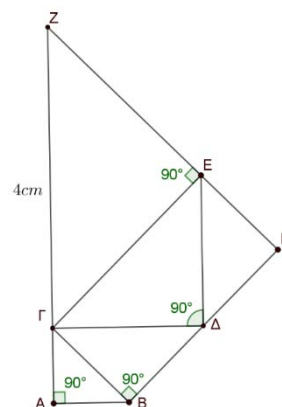
Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$, $\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$, $\widehat{E\hat{\Delta}\Gamma}$ και $\widehat{Z\hat{E}\Gamma}$ είναι ορθές. Δίνεται ακόμη ότι: $AB = A\Gamma$, $B\Gamma = B\Delta$, $\Delta\Gamma = \Delta E$, $E\Gamma = EZ$ και $\Gamma Z = 4 \text{ cm}$.

Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$10(\alpha^2 + \beta^2) = 29\alpha\beta \quad \text{και} \quad \alpha + \beta = 7.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ και $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020}, \frac{3020}{3021}, \frac{3021}{3022}, \frac{4019}{4020}, \frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο ώστε $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ έτσι ώστε $AB = \Delta\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E .

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου αριθμού α για τις οποίες ο ρητός αριθμός

$$A = \frac{(\alpha^2 - 1)^3}{(\alpha - 1)^4} \text{ είναι ακέραιος.}$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 16\alpha\beta \quad \text{και} \quad \alpha^3 + \beta^3 = 90\alpha\beta.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\alpha + \beta$ και $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{cases} xy^3 = -8 \\ (x+y)y = 2 \end{cases}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η κορυφή Α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΒΓΔΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΕ και Ζ είναι το μέσο του ΓΔ, να αποδείξετε οι ευθείες ΑΒ και ΖΗ είναι κάθετες και να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ΓΖΗ.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R} - \{3\}$ για τις οποίες οι λύσεις της εξίσωσης

$$(\lambda - 3)x^2 + (\lambda^2 + 1)x - (11\lambda - 18) = 0$$

είναι τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα μήκους $\sqrt{17}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$108(x-2)^4 + (4-x^2)^3 = 0.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά AB και σημείο E πάνω στην πλευρά $B\Gamma$ έτσι ώστε οι ευθείες DE και $A\Gamma$ να είναι παράλληλες. Στην προέκταση της DE προς το μέρος του E παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $EZ = A\Delta$. Αν O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΔBE , να αποδείξετε ότι τα σημεία O, Z, A και Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:
$$\begin{cases} xy^3 = -108 \\ (x+y)y = -3 \end{cases}.$$

Πρόβλημα 4

Με k διαφορετικά χρώματα θέλουμε να χρωματίσουμε τους αριθμούς $2, 3, 4, \dots, 1024$ έτσι ώστε κανένας αριθμός να μην έχει το ίδιο χρώμα με οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του k .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
(συμπληρωματικός διαγωνισμός)
14 Μαΐου 2021

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Τοποθετούμε σε σειρά όλους τους θετικούς ακέραιους διαιρέτες του ακεραίου 707070 από το μεγαλύτερο μέχρι το μικρότερο. Έτσι πρώτος στη σειρά είναι 707070 και τελευταίος είναι ο 1. Να προσδιορίσετε τον έβδομο στη σειρά διαιρέτη.

Μονάδες 6

Λύση

Με παραγοντοποίηση του αριθμού 707070 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχουμε:

$$707070 = 70 \cdot (10^4 + 10^2 + 1) = 70 \cdot 10101 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3367 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 37.$$

Σε κάθε διαιρέτη δ_k του 707070 που το τετράγωνό του είναι μικρότερο ή ίσο του 707070, αντιστοιχεί ένα άλλος διαιρέτης δ_λ μεγαλύτερος ή ίσος του δ_k , με $\delta_k \cdot \delta_\lambda = 707070$. Έτσι στο μικρότερο διαιρέτη 1, αντιστοιχεί ο μεγαλύτερος διαιρέτης 707070, στο διαιρέτη 2, αντιστοιχεί ο διαιρέτης $707070:2 = 353535$ και συνεχίζοντας ομοίως με τους μικρότερους διαιρέτες 3, 5, $2 \cdot 3, 7$ θα φθάσουμε στον έβδομο στη σειρά μικρότερο διαιρέτη $2 \cdot 5 = 10$. Έτσι ο έβδομος μεγαλύτερος διαιρέτης είναι ο $707070:10 = 70707$.

Πρόβλημα 2

Σε μία γιορτή ένας αριθμός ζευγαριών που αποτελούνται από ένα αγόρι και ένα κορίτσι χορεύουν. Από τα κορίτσια που συμμετέχουν στη γιορτή χορεύουν τα $\frac{2}{3}$, ενώ από τα αγόρια που συμμετέχουν χορεύουν τα $\frac{3}{5}$. Να βρείτε το ποσοστό των συμμετεχόντων στη γιορτή που χορεύουν.

Μονάδες 7

Λύση

Έστω ότι συμμετέχουν στη γιορτή κ κορίτσια και α αγόρια. Τότε χορεύουν τα $\frac{2\kappa}{3}$ των κοριτσιών και τα $\frac{3\alpha}{5}$ των αγοριών και ισχύει ότι: $\frac{2\kappa}{3} = \frac{3\alpha}{5} \Leftrightarrow \kappa = \frac{9\alpha}{10}$.

Ο αριθμός των παιδιών που χορεύουν είναι $2 \cdot \frac{3\alpha}{5} = \frac{6\alpha}{5}$, ενώ ο συνολικός αριθμός παιδιών που συμμετέχουν στη γιορτή είναι $\kappa + \alpha = \frac{9\alpha}{10} + \alpha = \frac{19\alpha}{10}$, οπότε έχουμε:

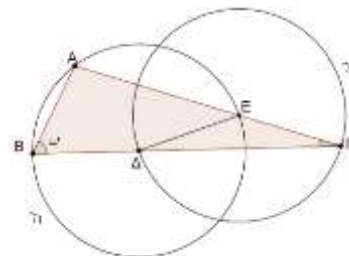
$$\frac{\text{Αριθμός παιδιών που χορεύουν}}{\text{Αριθμός παιδιών που συμμετέχουν}} = \frac{\frac{6\alpha}{5}}{\frac{19\alpha}{10}} = \frac{12}{19}.$$

Επομένως το ποσοστό x επί τις εκατό των παιδιών που χορεύουν είναι:

$$\frac{x}{100} = \frac{12}{19} \Leftrightarrow 19x = 1200 \Leftrightarrow x = \frac{1200}{19} = 63,15$$

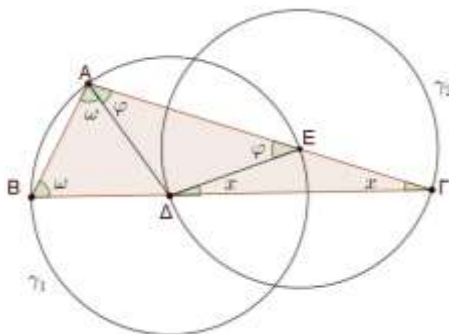
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το σημείο Δ ανήκει στην πλευρά $B\Gamma$ και το σημείο E ανήκει στην πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. Τα σημεία A, B, E ανήκουν στον κύκλο γ_1 με κέντρο το σημείο Δ . Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στον κύκλο γ_2 με κέντρο το σημείο E . Αν η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\omega = 63^\circ$ μοιρών, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.



Μονάδες 7

Λύση



Σχήμα 1

Από τις υποθέσεις του προβλήματος έχουμε ότι $\Delta B = \Delta A = \Delta E = E\Gamma$, οπότε τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Delta E$ και $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελή με $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{B}A = \omega$, $\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{E}A = \varphi$ και $E\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{\Gamma}\Delta = x$.

Επειδή η γωνία $\Delta\hat{E}A = \varphi$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ έπεται ότι $\varphi = 2x$, οπότε από το τρίγωνο $AB\Gamma$ που το άθροισμα των τριών γωνιών του είναι 180° έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} &= 180^\circ \Rightarrow \omega + \varphi + \omega + x = 180^\circ \stackrel{\varphi=2x}{\Rightarrow} 2\omega + 3x = 180^\circ \\ \Rightarrow 3x &= 180^\circ - 2\omega \Rightarrow x = 60^\circ - \frac{2\omega}{3} \Rightarrow x = 60^\circ - \frac{2 \cdot 63}{3} = 18^\circ. \end{aligned}$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Τοποθετούμε σε σειρά όλους τους θετικούς ακέραιους διαιρέτες του ακεραίου 4654650 από το μεγαλύτερο μέχρι το μικρότερο. Έτσι πρώτος στη σειρά είναι 4654650 και τελευταίος είναι ο 1. Να προσδιορίσετε το δέκατο στη σειρά διαιρέτη.

Μονάδες 6

Λύση

Με παραγοντοποίηση του αριθμού 4654650 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχουμε:

$$4654650 = 10 \cdot 465 \cdot (10^3 + 1) = 10 \cdot 465 \cdot 1001 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 31 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31$$

Σε κάθε διαιρέτη δ_κ του 4654650 που το τετράγωνό του είναι μικρότερο ή ίσο του 4654650, αντιστοιχεί ένας άλλος διαιρέτης δ_λ μεγαλύτερος ή ίσος του δ_κ , με $\delta_\kappa \cdot \delta_\lambda = 4654650$. Έτσι στο μικρότερο διαιρέτη 1, αντιστοιχεί ο μεγαλύτερος διαιρέτης 4654650, στο διαιρέτη 2, αντιστοιχεί ο διαιρέτης $4654650 : 2 = 2327325$ και συνεχίζοντας ομοίως με τους μικρότερους διαιρέτες 3, 5, $2 \cdot 3$, 7, $2 \cdot 5$, 11, 13, θα φθάσουμε στον δέκατο στη σειρά μικρότερο διαιρέτη $2 \cdot 7 = 14$. Έτσι ο δέκατος μεγαλύτερος διαιρέτης είναι ο $4654650 : 14 = 332475$.

Πρόβλημα 2

(α) Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός y έτσι ώστε η διαφορά $x - y$ να ισούται με το γινόμενο xy .

(β) Αν οι x, y ικανοποιούν τις συνθήκες του ερωτήματος (α), να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = \frac{y(x^2+2)}{x(y+1)}$.

Μονάδες 7

Λύση (α) Έχουμε

$$x - y = xy \Leftrightarrow x = y + xy \Leftrightarrow x = y(1 + x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1 + x}.$$

Επομένως, για κάθε πραγματικό αριθμό $x > 0$ υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $y = \frac{x}{1+x}$ έτσι ώστε η διαφορά $x - y$ να ισούται με το γινόμενο xy .

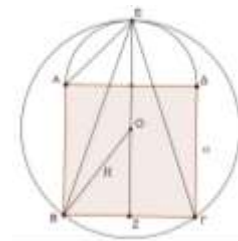
(β) Αντικαθιστώντας το y , παίρνουμε

$$A = \frac{y(x^2 + 2)}{x(y + 1)} = \frac{\frac{x}{x+1} \cdot (x^2 + 2)}{x \cdot \frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x^2 + 2}{2x + 1}.$$

Όμως $x^2 + 2 \geq 2x + 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$, και επομένως $A \geq 1$. Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $x = 1$ και $y = \frac{1}{2}$. Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης A είναι 1.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς α . Το ημικύκλιο ΑΕΔ έχει διάμετρο την πλευρά ΑΔ του τετραγώνου και ο κύκλος γ με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα $OB = OG = OE = R$ εφάπτεται εσωτερικά με το ημικύκλιο στο σημείο Ε που είναι το μέσο του ημικυκλίου.



Δίνεται ακόμη ότι η ΕΖ είναι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Να εκφράσετε το μήκος της ακτίνας R του κύκλου γ ως συνάρτηση της πλευράς α και να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΟΕ, ως συνάρτηση του α .

Μονάδες 7

Λύση

Επειδή ΕΖ μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ και $OB = OG$ η ευθεία ΕΖ περιέχει και το σημείο Ο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΖ έχουμε ότι $BZ = \frac{\alpha}{2}$, $OB = R$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε:

$$OZ^2 = R^2 - \frac{\alpha^2}{4} \quad (1)$$

Έστω Η το σημείο που τέμνει την πλευρά ΑΔ η ευθεία ΕΖ. Τότε, αφού $EA = ED$, το Η θα είναι το μέσο της ΑΔ και $HE = HA = \frac{\alpha}{2}$. Επειδή τα σημεία Ε, Ο και Ζ είναι συνευθειακά και το Ο βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ε και Ζ έχουμε ότι:

$$ZE = ZH + HE = \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2} \quad (2)$$

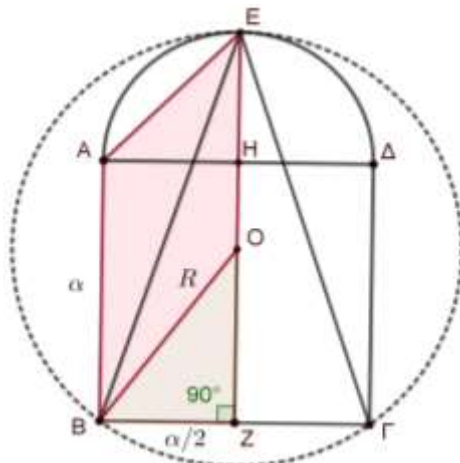
$$OZ = EZ - EO = EZ - R = \frac{3\alpha}{2} - R \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε:

$$\left(\frac{3\alpha}{2} - R\right)^2 = R^2 - \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \frac{9\alpha^2}{4} - 3\alpha R + R^2 = R^2 - \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow \frac{10\alpha^2}{4} = 3\alpha R \Leftrightarrow R = \frac{5\alpha}{6}.$$

Επειδή $EZ \parallel AB$ το τετράπλευρο ΑΒΟΕ είναι τραπέζιο, οπότε έχουμε:

$$(ABOE) = \left(\frac{AB + EO}{2}\right) \cdot AZ = \left(\frac{\alpha + R}{2}\right) \cdot \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{\alpha + \frac{5\alpha}{6}}{2}\right) \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{11\alpha^2}{24}.$$



Σχήμα 2

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν μ, ν θετικοί ακέραιοι $\mu \geq 2$ και $9^{\mu-1} + 9^{\nu} \leq 2 \cdot 3^{\nu+\mu-1}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $3^{\mu} + 3^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 12.

Μονάδες 6

Λύση

Η δεδομένη σχέση γράφεται:

$$\begin{aligned} 9^{\mu-1} + 9^{\nu} &\leq 2 \cdot 3^{\nu+\mu-1} \Leftrightarrow (3^{\mu-1})^2 + (3^{\nu})^2 - 2 \cdot 3^{\mu-1} \cdot 3^{\nu} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (3^{\mu-1} - 3^{\nu})^2 \leq 0 \Leftrightarrow 3^{\mu-1} - 3^{\nu} = 0, \end{aligned}$$

οπότε $3^{\mu-1} = 3^{\nu}$ και

$$3^{\mu} + 3^{\nu} = 3 \cdot 3^{\mu-1} + 3^{\nu} = 3 \cdot 3^{\nu} + 3^{\nu} = 4 \cdot 3^{\nu},$$

που είναι πολλαπλάσιο του 12, αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ είναι τέτοιοι ώστε $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$. Βρίσκουμε όλα τα αθροίσματα που δημιουργούνται με δύο όρους από τους $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ και παρατηρούμε ότι τα τρία μικρότερα από αυτά είναι 128, 144 και 148, ενώ τα δύο μεγαλύτερα είναι 204 και 192. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

Μονάδες 7

Λύση

Τα δύο μικρότερα αθροίσματα είναι $\alpha + \beta = 128$ και $\alpha + \gamma = 144$. Το 148 που είναι το τρίτο μικρότερο άθροισμα μπορεί να είναι το $\alpha + \delta$ ή $\beta + \gamma$. Τα δύο μεγαλύτερα αθροίσματα είναι τα $\delta + \varepsilon = 204$ και $\gamma + \varepsilon = 192$. Από τα δεδομένα αθροίσματα έχουμε ότι:

$$\alpha + \delta = (\alpha + \gamma) + (\delta + \varepsilon) - (\gamma + \varepsilon) = 144 + 204 - 192 = 156,$$

οπότε το τρίτο μικρότερο άθροισμα είναι το $\beta + \gamma = 148$.

Από τις ισότητες $\alpha + \beta = 128$, $\alpha + \gamma = 144$, $\beta + \gamma = 148$ με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε $\alpha + \beta + \gamma = 210$, από την οποία με αφαίρεση κατά μέλη διαδοχικά των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε: $\alpha = 62$, $\beta = 66$, $\gamma = 82$.

Τέλος, από τις εξισώσεις $\gamma + \varepsilon = 192$ και $\delta + \varepsilon = 204$ λαμβάνουμε: $\varepsilon = 110$, $\delta = 94$.

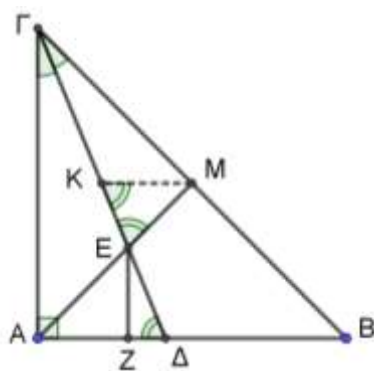
Άρα είναι $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = (62, 66, 82, 94, 110)$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ και τη διάμεσο AM στο σημείο E . Η κάθετη από το E προς την πλευρά AB την τέμνει στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:
 $\Delta B = 2 \cdot EZ$

Μονάδες 7

Λύση



Σχήμα 3

Έστω ότι η παράλληλη από το M προς την AB τέμνει τη διχοτόμο $\Gamma\Delta$ στο K . Τότε η MK είναι μεσοπαράλληλη στο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$, οπότε:

$$\Delta B = 2 \cdot KM \quad (1)$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\hat{MKE} = \hat{E\Delta A} = 90^\circ - \hat{A\Gamma\Delta} = 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ. \quad (2)$$

Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο $EM\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{KEM} = 90^\circ - \hat{E\Gamma M} = 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ. \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) έπεται ότι: $\hat{MKE} = \hat{KEM} = 67,5^\circ$, οπότε το τρίγωνο MKE είναι ισοσκελές με $MK = ME$. Όμως το E είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε ισαπέχει από τις πλευρές BA και $B\Gamma$. Άρα είναι $ME = EZ$, οπότε θα είναι και

$$MK = EZ \quad (4)$$

Από τις (1) και (4) έπεται ότι: $\Delta B = 2 \cdot EZ$

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = 15 \\ (\alpha+1)(\beta+3)(\gamma+5) = 120 \end{cases}.$$

Μονάδες 6

Λύση

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$(\alpha+1)(\beta+3)(\gamma+5) = 120$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma + \beta\gamma + 3\alpha\gamma + 5\alpha\beta + 5\beta + 3\gamma + 15\alpha + 15 = 120$$

$$\stackrel{\alpha\beta\gamma=15}{\Leftrightarrow} \beta\gamma + 3\alpha\gamma + 5\alpha\beta + 5\beta + 3\gamma + 15\alpha = 90$$

$$\Leftrightarrow (15\alpha + \beta\gamma) + (5\beta + 3\alpha\gamma) + (3\gamma + 5\alpha\beta) = 90$$

$$\stackrel{\alpha\beta\gamma=15}{\Leftrightarrow} 15\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + 5\left(\beta + \frac{9}{\beta}\right) + 3\left(\gamma + \frac{25}{\gamma}\right) = 90. \quad (1)$$

Με τη γνωστή ανισότητα $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $x, y > 0$, όπου η ισότητα ισχύει για $x = y$, λαμβάνουμε:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2, \quad \beta + \frac{9}{\beta} \geq 6, \quad \gamma + \frac{25}{\gamma} \geq 10, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0, \quad (2)$$

όπου οι ισότητες ισχύουν για $\alpha = 1$, $\beta = 3$ και $\gamma = 5$. Τότε έχουμε:

$$15\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + 5\left(\beta + \frac{9}{\beta}\right) + 3\left(\gamma + \frac{25}{\gamma}\right) \geq 15 \cdot 2 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 10 = 90,$$

οπότε για να αληθεύει η εξίσωση (1) πρέπει και αρκεί οι τρεις ανισότητες (2) να αληθεύουν ως ισότητες, δηλαδή $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, 5)$.

2ος τρόπος

Με τη γνωστή ανισότητα $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $x, y > 0$, όπου η ισότητα ισχύει για $x = y$, λαμβάνουμε:

$$\alpha + 1 \geq 2\sqrt{\alpha}, \quad \beta + 3 \geq 2\sqrt{3\beta}, \quad \gamma + 5 \geq 2\sqrt{5\gamma}.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη παίρνουμε

$$(\alpha + 1)(\beta + 3)(\gamma + 5) \geq 8\sqrt{15\alpha\beta\gamma} = 8 \cdot 15 = 120.$$

Επομένως πρέπει σε όλες να ισχύει η ισότητα, δηλαδή $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$.

Πρόβλημα 2

Για τον πραγματικό αριθμό β γνωρίζουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός α

έτσι ώστε να ικανοποιείται η ισότητα: $\alpha^2 - \frac{1}{\alpha} = \beta$.

Να προσδιορίσετε τις ακέραιες τιμές του β για τις οποίες ο αριθμός $\gamma = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha}$ είναι ακέραιος.

Λύση

Από τις ισότητες $\beta = \alpha^2 - \frac{1}{\alpha}$ και $\gamma = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha}$ με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\gamma + \beta = 2\alpha^2 \text{ και } \gamma - \beta = \frac{2}{\alpha},$$

από τις οποίες με απαλοιφή του α λαμβάνουμε:

$$(\gamma + \beta)(\gamma - \beta)^2 = 8.$$

Αν β, γ ακέραιοι, τότε πρέπει $0 < |\gamma - \beta| < 3$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

$$\gamma + \beta = 8 \text{ και } (\gamma - \beta)^2 = 1 \Rightarrow \gamma + \beta = 8 \text{ και } (\gamma - \beta = 1 \text{ ή } \gamma - \beta = -1), \text{ αδύνατο.}$$

2^η περίπτωση

$$\gamma + \beta = 2 \text{ και } (\gamma - \beta)^2 = 4 \Rightarrow \gamma + \beta = 2 \text{ και } (\gamma - \beta = 2 \text{ ή } \gamma - \beta = -2)$$

$$\Leftrightarrow (\gamma + \beta = 2 \text{ και } \gamma - \beta = 2) \text{ ή } (\gamma + \beta = 2 \text{ και } \gamma - \beta = -2)$$

$$\Leftrightarrow \gamma = 2, \beta = 0 \text{ ή } \gamma = 0, \beta = 2$$

Επομένως, οι ζητούμενες τιμές του β είναι 0 ή 2.

Πράγματι, για $\beta = 0$, υπάρχει ο $\alpha = 1$, έτσι ώστε $\alpha^2 - \frac{1}{\alpha} = \beta$ και τότε

$\gamma = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha} = 2$, ενώ για $\beta = 2$, υπάρχει ο $\alpha = -1$, έτσι ώστε $\alpha^2 - \frac{1}{\alpha} = \beta$ και τότε

$$\gamma = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha} = 0.$$

2^{ος} τρόπος

Από τις ισότητες $\beta = \alpha^2 - \frac{1}{\alpha}$ και $\gamma = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha}$ με αφαίρεση κατά μέλη

λαμβάνουμε:

$$\gamma - \beta = \frac{2}{\alpha},$$

δηλαδή $\alpha = \frac{2}{\gamma - \beta} = \frac{2}{\kappa}$, όπου κ ακέραιος. Αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση έχουμε ότι

$$\frac{4}{\kappa^2} - \frac{\kappa}{2} = \frac{8 - \kappa^3}{2\kappa^2} = \beta \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

οπότε πρέπει ο κ^2 να διαιρεί το 8, οπότε $\kappa = \pm 1, \pm 2$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (1), οι ακέραιες τιμές του β που παίρνουμε είναι οι 0 και 2.

Πράγματι, για $\beta = 0$, υπάρχει ο $\alpha = 1$, έτσι ώστε $\alpha^2 - \frac{1}{\alpha} = \beta$ και τότε

$$\gamma = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha} = 2, \text{ ενώ για } \beta = 2, \text{ υπάρχει ο } \alpha = -1, \text{ έτσι ώστε } \alpha^2 - \frac{1}{\alpha} = \beta \text{ και τότε}$$

$$\gamma = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha} = 0.$$

Πρόβλημα 3

Έστω $AB\Gamma$ ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$. Τα σημεία Δ και E είναι διαφορετικά πάνω στην ευθεία $A\Gamma$ έτσι ώστε $\hat{A}\hat{B}\Delta = 15^\circ$ και $\Gamma\Delta = \Gamma E$. Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\Gamma\hat{B}E$.

Μονάδες 7

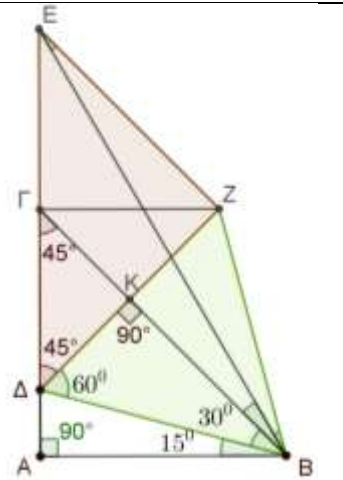
Λύση

Θεωρούμε το σημείο Z συμμετρικό του σημείου Δ ως προς την ευθεία $B\Gamma$. Τότε θα είναι $\Delta Z \perp B\Gamma$ και αν η ΔZ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο K , $K\Delta = KZ$. Επιπλέον, λόγω συμμετρίας, θα είναι $BZ = B\Delta$, και

$$\hat{K}\hat{B}Z = \hat{K}\hat{B}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{B}\Delta - \hat{\Delta}\hat{B}\Delta = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ.$$

Επειδή $\hat{\Delta}\hat{B}Z = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$, το τρίγωνο ΔBZ είναι ισόπλευρο, οπότε και $\Delta Z = BZ = B\Delta$. Το τρίγωνο $\Delta\Gamma Z$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, αφού $\Gamma\Delta = \Gamma Z$, λόγω συμμετρίας, και $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}Z = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$. Άρα θα είναι $\Gamma Z = \Gamma\Delta = \Gamma E = \frac{\Delta E}{2}$, οπότε και το τρίγωνο

ΔZE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $Z\Delta = ZE$. Επομένως $ZE = ZB$ και το τρίγωνο ZBE είναι ισοσκελές με $\hat{B}\hat{Z}E = \hat{B}\hat{Z}\Delta + \hat{\Delta}\hat{Z}E = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$.



Σχήμα 4

$$\text{Άρα θα είναι } \hat{Z}\hat{B}E = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ \text{ και } \hat{\Gamma}\hat{B}E = \hat{\Gamma}\hat{B}Z - \hat{Z}\hat{B}E = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ.$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$x^2 + y^2 + (x - y)^2 + 2 = 2|x + y|. \quad \text{Μονάδες 6}$$

Λύση

$$x^2 + y^2 + (x - y)^2 + 2 = 2|x + y| \quad (1)$$

$$\Rightarrow |x + y| = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(x - y)^2}{2} + 1 \geq \frac{(x + y)^2}{4} + 1$$

$$\Rightarrow |x + y|^2 - 4|x + y| + 4 \leq 0 \Rightarrow (|x + y| - 2)^2 \leq 0 \Rightarrow |x + y| = 2,$$

όπου η ισότητα ισχύει όταν $x = y$.

Για $x = y$ η εξίσωση (1) γίνεται: $2x^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, οπότε

$$(x, y) = (1, 1) \text{ ή } (x, y) = (-1, -1)$$

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα

$$\Sigma(\mu, \nu) = \frac{1}{2} [\mu + (\mu + 2) + (\mu + 4) + \dots + (\mu + 2\nu) - \mu(\nu + \mu)],$$

δεν μπορεί να γραφεί ως δύναμη της μορφής 2^k , όπου k θετικός ακέραιος, για οποιουδήποτε θετικούς ακέραιους μ, ν με $\mu < \nu$. Μονάδες 7

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} 2\Sigma_{\mu, \nu} &= \mu + (\mu + 2) + \dots + (\mu + 2\nu - 2) + \mu + 2\nu - \mu(\mu + \nu) \\ &= \mu(\nu + 1) + 2(1 + 2 + \dots + \nu) - \mu(\mu + \nu) \\ &= \mu(\nu + 1) + \nu(\nu + 1) - \mu(\mu + \nu) \\ &= (\mu + \nu)(\nu + 1) - \mu(\mu + \nu) = (\mu + \nu)(\nu - \mu + 1) \end{aligned}$$

Επομένως είναι:

$$(\nu + \mu)(\nu - \mu + 1) = 2\Sigma_{\mu, \nu}, \text{ άρτιος.}$$

Επειδή οι αριθμοί $\nu + \mu$ και $\nu - \mu$ είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί, έπεται ότι οι αριθμοί $\nu + \mu$ και $\nu - \mu + 1$ είναι ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός.

Επιπλέον $\nu + \mu \geq 3$ και $\nu - \mu + 1 \geq 2$, οπότε σε κάθε περίπτωση ο αριθμός $\Sigma_{\mu, \nu}$ έχει ένα περιττό διαιρέτη μεγαλύτερο του 1. Άρα δεν μπορεί να είναι δύναμη του 2 με θετικό ακέραιο διαιρέτη.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma = 2 \cdot AB$ και περιγεγραμμένο κύκλο $\gamma(O, R)$. Η κάθετη από το O προς τη διχοτόμο AD του τριγώνου την τέμνει στο σημείο E . Θεωρούμε σημείο Z πάνω στην ευθεία AD , διαφορετικό από το D , τέτοιο ώστε

$$\mathbf{E}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Z} = \mathbf{E}\hat{\mathbf{\Gamma}}\mathbf{Z}.$$

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
5 Νοεμβρίου 2021

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι $x = \overline{abc}$ και $y = \overline{cba}$ για τους οποίους ισχύει $0 < c < a$ και οι δύο διαιρούνται με το 4.

(Σημείωση: $x = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, $y = \overline{cba} = 100c + 10b + a$).

Λύση

Εφόσον οι αριθμοί x, y είναι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι, τα a και c θα είναι ψηφία διαφορετικά από το μηδέν, όπως δίνεται και στην υπόθεση. Για το ψηφίο b δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός, οπότε ο b μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός μονοψήφιος ακέραιος.

Εφόσον οι αριθμοί x, y διαιρούνται με το 4 θα είναι άρτιοι, οπότε οι μονοψήφιοι ακέραιοι a και c θα είναι άρτιοι και επειδή $c < a$, οι δυνατές τιμές για το ζεύγος (a, c) μπορεί να είναι:

$(8, 6)$ ή $(8, 4)$ ή $(8, 2)$ ή $(6, 4)$ ή $(6, 2)$ ή $(4, 2)$.

Πρέπει επίσης οι αριθμοί $\overline{bc}$ και $\overline{ba}$ να διαιρούνται με το 4. Δοκιμάζοντας τώρα τις τιμές του $b = 0$ ή $b = 1$ ή $b = 2$ ή $b = 3$ ή $b = 4$ ή $b = 5$ ή $b = 6$ ή $b = 7$ ή $b = 8$ ή $b = 9$

(σε συνδυασμό με τα προηγούμενα) καταλήγουμε ότι οι ζητούμενοι αριθμοί $x = \overline{abc}$ είναι οι: 884, 864, 844, 824, 804 και 692, 672, 652, 632, 612.

Οι αριθμοί $y = \overline{cba}$ προκύπτουν από την εναλλαγή των ψηφίων του αριθμού $x = \overline{abc}$.

Πρόβλημα 2

Οι καθηγητές των Μαθηματικών και Φυσικής βαθμολόγησαν για το Α τετράμηνο τους μαθητές ενός Τμήματος του Γυμνασίου τους ως εξής:

Ο καθηγητής των Μαθηματικών έβαλε α φορές το βαθμό 20, β φορές το βαθμό 18, γ φορές το βαθμό 16 και δ φορές το βαθμό 14. Ο καθηγητής της Φυσικής έβαλε α φορές το βαθμό 18, β φορές το βαθμό 16, γ φορές το βαθμό 14 και δ φορές το βαθμό 20. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική. Να προσδιορίσετε τον αριθμό N των μαθητών του Τμήματος, αν δίνεται ότι $20 < N < 28$.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση το πλήθος των μαθητών του Τμήματος είναι $N = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ και επειδή το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική, έχουμε:

$$\begin{aligned} 20\alpha + 18\beta + 16\gamma + 14\delta &= 18\alpha + 16\beta + 14\gamma + 20\delta \\ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma &= 6\delta \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 3\delta. \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε $N = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 3\delta + \delta = 4\delta$ και αφού $20 < N < 28$, έπεται ότι $N = 24$.

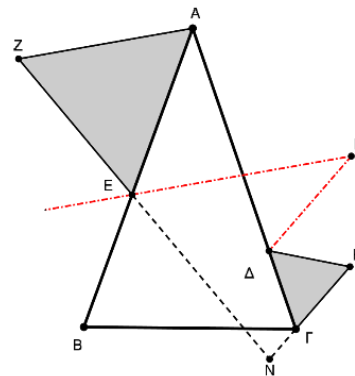
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) και τα τρίγωνα AEZ , $\Delta\Gamma H$ είναι ισόπλευρα. Οι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{E}Z$ και $A\hat{\Delta}H$ τέμνονται στο σημείο K . Οι προεκτάσεις των ευθύγραμμων τμημάτων EZ και ΓH τέμνονται στο σημείο N .

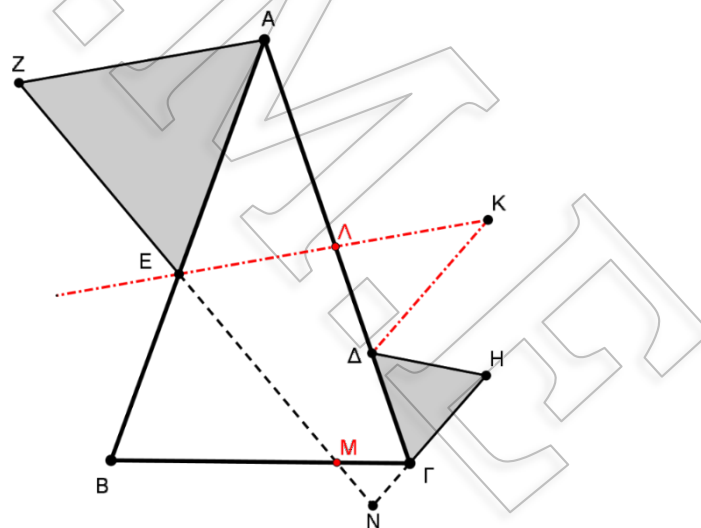
Να αποδείξετε ότι:

(α) $E\hat{K}\Delta = B\hat{A}\Gamma$

(β) $E\hat{N}\Gamma = 120^\circ - B\hat{A}\Gamma$



Λύση



Έστω τώρα M η τομή της EN με την $B\Gamma$ και Λ η τομή της EK με την $A\Gamma$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

(α) $E\hat{K}\Delta = \Lambda\hat{K}\Delta = 180^\circ - K\hat{\Lambda}\Delta - K\hat{\Delta}\Lambda = 180^\circ - K\hat{\Lambda}\Delta - 60^\circ = 120^\circ - K\hat{\Lambda}\Delta =$
 $= 120^\circ - A\hat{\Lambda}E = 120^\circ - (180^\circ - \hat{A} - A\hat{E}\Lambda) = 120^\circ - (180^\circ - \hat{A} - 60^\circ) = \hat{A}.$

(β) $E\hat{N}\Gamma = M\hat{N}\Gamma = 180^\circ - N\hat{M}\Gamma - N\hat{\Gamma}M = 180^\circ - E\hat{M}B - N\hat{\Gamma}M =$
 $= 180^\circ - (180^\circ - \hat{B} - B\hat{E}M) - (180^\circ - \hat{\Gamma} - \Delta\hat{\Gamma}H) =$
 $= 180^\circ - (180^\circ - \hat{B} - 60^\circ) - (180^\circ - \hat{\Gamma} - 60^\circ) =$
 $= \hat{B} + \hat{\Gamma} - 60^\circ = 180^\circ - \hat{A} - 60^\circ = 120^\circ - \hat{A}.$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Ο Γιάννης μπορεί να χρησιμοποιήσει απεριόριστες φορές το ψηφίο 9 και ακριβώς μία μόνο φορά το ψηφίο 2 για να γράψει θετικούς ακέραιους. Να βρείτε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο που μπορεί να γράψει ο Γιάννης ο οποίος διαιρείται με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου $\Sigma = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Λύση

Ο αριθμός που μπορεί να γράψει ο Γιάννης θα τελειώνει σε 9 ή σε 2, οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 5.

Επίσης, το άθροισμα των ψηφίων οποιουδήποτε αριθμού μπορεί να γράψει ο Γιάννης είναι της μορφής $9\kappa + 2 = \text{πολ. } 3 + 2$, οπότε ο αριθμός δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επίσης δεν μπορεί να διαιρείται με το 6 ή το 9 που είναι πολλαπλάσια του 3.

Θα εξετάσουμε τώρα τη δυνατότητα να διαιρείται ο αριθμός με κάποιους από τους αριθμούς 2, 4, 7 και 8.

Ο αριθμός που θα γράψει ο Γιάννης θα διαιρείται με το 2, αν το τελευταίο ψηφίο του είναι το 2. Στη περίπτωση που το τελευταίο ψηφίο του είναι το 2, τότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του θα είναι σε κάθε περίπτωση το 92 που διαιρείται με το 4, οπότε και ο αριθμός θα διαιρείται με το 4.

Έτσι, απομένει η περίπτωση να διαιρείται ο αριθμός με το 8 και το 7.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 992 διαιρείται με το 8, αλλά δεν διαιρείται με το 7.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι η επισύναψη του ψηφίου 9 στα αριστερά του αριθμού 992 τον αυξάνει κατά $9000 = 9 \cdot 1000 = 9 \cdot 125 \cdot 8$, που είναι πολλαπλάσιο του 8. Ομοίως η επισύναψη του ψηφίου 9 αριστερά του 992 περισσότερες φορές αυξάνει τον αριθμό κατά αριθμό πολλαπλάσιο του 1000, άρα και του 8, οπότε ο αριθμός που προκύπτει σε κάθε περίπτωση διαιρείται με το 8.

Επομένως αρκεί να βρούμε τον ελάχιστο αριθμό φορών που πρέπει να επισυνάψουμε αριστερά το 9 ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται με το 7. Παρατηρούμε ότι:

$$992 = 7 \cdot 141 + 5, 9000 = 7 \cdot 1285 + 5 \Rightarrow 9992 = \text{πολ. } 7 + 10 = \text{πολ. } 7 + 3,$$

$$90000 = 10 \cdot 9000 = \text{πολ. } 7 + 50 = \text{πολ. } 7 + 1 \Rightarrow 99992 = \text{πολ. } 7 + 4,$$

$$900000 = 10 \cdot 90000 = \text{πολ. } 7 + 10 = \text{πολ. } 7 + 3 \Rightarrow 999992 = \text{πολ. } 7.$$

Επομένως ο ελάχιστος δυνατός θετικός ακέραιος που μπορεί να γράψει ο Γιώργος ο οποίος διαιρείται με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ είναι ο αριθμός 999992. Ο αριθμός αυτός διαιρείται με τους, 2, 4, 8 και 7.

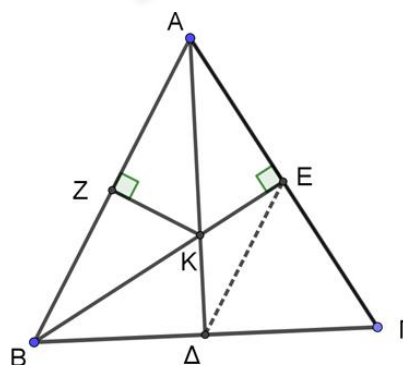
Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η διχοτόμος AD της γωνίας $\hat{A}$, το ύψος BE και η μεσοκάθετη ZK της πλευράς AB περνούν από το ίδιο σημείο K .

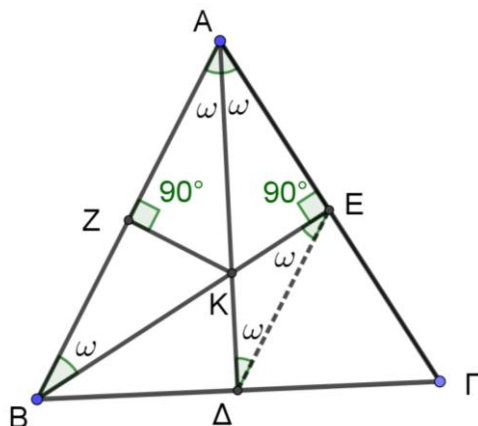
(α) Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η ευθεία ED είναι παράλληλη προς την ευθεία AB , να αποδείξετε ότι $KD = KE = KZ$.

(Σημείωση: Να σχεδιάσετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα)



Λύση



(α) Αν θέσουμε $\hat{A} = 2\omega$, τότε $\hat{B\hat{A}K} = \hat{K\hat{A}\Gamma} = \omega$.

Επειδή ZK μεσοκάθετη της πλευράς AB έπεται ότι $KA = KB$, δηλαδή το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές και έχει $\hat{K\hat{B}A} = \hat{K\hat{A}B} = \omega$. Επομένως, από το ορθογώνιο τρίγωνο ABE έχουμε:

$$\hat{BAE} + \hat{ABE} = 180^\circ - 90^\circ \Rightarrow 2\omega + \omega = 90^\circ \Rightarrow 3\omega = 90^\circ \Rightarrow \omega = 30^\circ,$$

οπότε θα είναι $\hat{A} = 2\omega = 60^\circ$.

(β) Αν η ευθεία ED είναι παράλληλη προς την ευθεία AB, τότε από τις εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζουν με τέμνουσες τις ευθείες AD και BE, έχουμε:

$$\hat{ADE} = \hat{BAD} = \hat{ABE} = \hat{BED} = \omega,$$

οπότε το τρίγωνο KDE είναι ισοσκελές με $KD = KE$. Επιπλέον, επειδή η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ έπεται ότι $KZ = KE$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Μία σχολική τάξη έχει συνολικά A μαθητές. Μία μαθήτρια, η Μαρία, αποφασίζει να στείλει ευχετήριες κάρτες στα υπόλοιπα παιδιά της τάξης. Όμως, ξεχνάει να βάλει γραμματόσημο σε $\frac{A}{4}$ από αυτές που είχε ετοιμάσει, οπότε στέλνει τις υπόλοιπες. Από τις υπόλοιπες, λόγω καθυστέρησης του ταχυδρομείου, μόνο το $\frac{1}{10}$ έφτασε εγκαίρως. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του A;

Λύση

Η Μαρία είχε ετοιμάσει συνολικά $A - 1$ κάρτες για να στείλει σε όλους τους συμμαθητές της. Επομένως, έστειλε τελικά $(A - 1) - \frac{A}{4} = \frac{3A}{4} - 1$ κάρτες. Το $\frac{1}{10}$ αυτών είναι $\frac{1}{10} \left(\frac{3A}{4} - 1 \right) = \frac{3A - 4}{40}$ και πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός, αφού αντιστοιχεί σε μαθητές που έλαβαν κάρτα εγκαίρως. Επομένως, για να βρούμε την ελάχιστη τιμή του A, το $3A - 4$ πρέπει να είναι το μικρότερο δυνατό πολλαπλάσιο του 40. Η εξίσωση $3A - 4 = 40$, δεν δίνει ακέραια τιμή για το A, οπότε κοιτάζουμε το αμέσως επόμενο πολλαπλάσιο που είναι το 80. Η εξίσωση $3A - 4 = 80$ έχει λύση $A = 28$, επομένως αυτή είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του A.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να λύσετε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y + \frac{3}{2x - 6y} = \frac{13}{2} \\ (5x - 2y)(x - 3y) + 2 = 6(x - 3y) \end{array} \right\}$$

Λύση

Για $x \neq 3y$ διαιρούμε τα μέλη της εξίσωσης (2) με $(x - 3y)$ οπότε το σύστημα γράφεται ισοδύναμα:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y + \frac{3}{2x - 6y} = \frac{13}{2} \\ (5x - 2y) + \frac{2}{x - 3y} = 6 \end{array} \right\}.$$

Αντικαθιστώντας τώρα, όπου $5x - 2y = \alpha$ και $\frac{1}{x - 3y} = \beta$,

το τελευταίο σύστημα γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \frac{3\beta}{2} = \frac{13}{2} \\ \alpha + 2\beta = 6 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + 3\beta = 13 \\ \alpha + 2\beta = 6 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 8 \\ \beta = -1 \end{array} \right\}.$$

Άρα έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y = 8 \\ \frac{1}{x - 3y} = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y = 8 \\ x - 3y = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array} \right\}.$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους ακέραιους $N = \overline{\alpha 1 \beta} = 100\alpha + 10 + \beta$, $0 < \alpha < \beta$,

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος $\alpha + (\alpha + 1) + \dots + \beta + (\beta + 1)$, στο οποίο αθροίζουμε όλους τους ακεραίους από τον α μέχρι και τον $\beta + 1$.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε

$$N = \overline{\alpha 1 \beta} = 100\alpha + 10 + \beta = 8[\alpha + (\alpha + 1) + \dots + \beta + (\beta + 1)] \leq 8(1 + 2 + \dots + 10) = 440,$$

από την οποία προκύπτει ότι: $\alpha \leq 4$. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha = 4$. Τότε $415 \leq N \leq 419$, N πολλαπλάσιο του 8 $\Rightarrow N = 416$. Παρατηρούμε όμως ότι
 $\alpha + (\alpha + 1) + \dots + \beta + (\beta + 1) = 4 + 5 + 6 + 7 = 22$ και $22 \cdot 8 = 176 \neq 416$.
- $\alpha = 3$. Τότε $314 \leq N \leq 319$, N πολλαπλάσιο του 8, άτοπο.
- $\alpha = 2$. Τότε $213 \leq N \leq 219$, N πολλαπλάσιο του 8 $\Rightarrow N = 216$.
 Παρατηρούμε ότι:
 $\alpha + (\alpha + 1) + \dots + \beta + (\beta + 1) = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$ και $27 \cdot 8 = 216$.
- $\alpha = 1$. Τότε $112 \leq N \leq 119$, N πολλαπλάσιο του 8 $\Rightarrow N = 112$.
 Παρατηρούμε όμως ότι:
 $\alpha + (\alpha + 1) + \dots + \beta + (\beta + 1) = 1 + 2 + 3 = 6$ και $6 \cdot 8 = 48 \neq 112$.

Επομένως η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός $N = 216$.

2ος τρόπος: Επειδή ο αριθμός διαιρείται με το 8, θα διαιρείται και με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του θα διαιρείται με το 4. Επομένως ο αριθμός $\overline{1\beta}$ θα διαιρείται με το 4. Συνεπώς $\beta = 2$ ή $\beta = 6$.

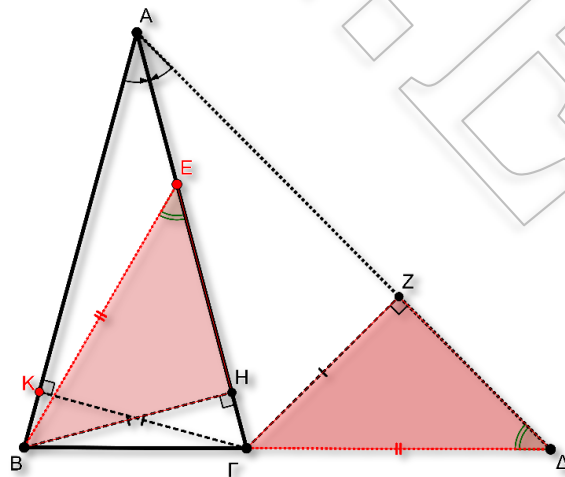
- Αν $\beta = 2$, τότε από τη σχέση $\alpha < \beta$, παίρνουμε ότι $\alpha = 1$, οπότε $N = 112$.
 Παρατηρούμε όμως ότι:
 $\alpha + (\alpha + 1) + \dots + \beta + (\beta + 1) = 1 + 2 + 3 = 6$ και $6 \cdot 8 = 48 \neq 112$.
- Αν $\beta = 6$, τότε από τη σχέση $\alpha < \beta$ παίρνουμε $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
 Όμως $N = 100\alpha + 16$, άρα για να διαιρείται με το 8, πρέπει α άρτιος. Επομένως, $\alpha = 2$ ή $\alpha = 4$. Για $\alpha = 2$, παίρνουμε $N = 216$, που ικανοποιεί, ενώ για $\alpha = 4$, παίρνουμε $N = 416$, που δεν ικανοποιεί.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}$. Πάνω στην ευθεία $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $BE = \Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{E}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{\Delta}A}$.

Λύση

Από το σημείο B θεωρούμε BH κάθετη στην $A\Gamma$, από το σημείο Γ θεωρούμε ΓK κάθετη στην AB και από το σημείο Γ θεωρούμε ΓZ κάθετη στην $A\Delta$.



Εφόσον $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}$ η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{A}\Delta}$ και κατά συνέπεια:

$$\Gamma Z = \Gamma K \quad (1).$$

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, άρα τα τμήματα ΓK και BH είναι ίσα μεταξύ τους (διότι είναι τα ύψη του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του). Άρα:

$$BH = \Gamma K \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε: $BH = \Gamma Z$ (3).

Για τα ορθογώνια τρίγωνα BEH και $Z\Delta\Gamma$, ισχύουν οι ισότητες πλευρών: $BE = \Gamma\Delta$ (δεδομένο) και $BH = \Gamma Z$ (από την ισότητα (3)). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε:

$$\widehat{BEH} = \widehat{\Gamma\Delta Z} \Leftrightarrow \widehat{B\hat{E}\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta A}.$$

Παρατήρηση

Το σημείο E θα μπορούσε να βρίσκεται εκτός του τμήματος $A\Gamma$ (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα) ... και στις δύο περιπτώσεις ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία (συγκρίνοντας τα κατάλληλα σκιασμένα ορθογώνια τρίγωνα)	
---	--

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$2x^3 - 7y^2 + 4z = -4$$

$$2y^3 - 7z^2 + 4x = -4$$

$$2z^3 - 7x^2 + 4y = -4$$

Λύση

Προσθέτοντας τις τρεις σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$(2x^3 - 7y^2 + 4z + 4) + (2y^3 - 7z^2 + 4x + 4) + (2z^3 - 7x^2 + 4y + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x^3 - 7x^2 + 4x + 4) + (2y^3 - 7y^2 + 4y + 4) + (2z^3 - 7z^2 + 4z + 4) = 0.$$

Παραγοντοποιούμε την παράσταση της πρώτης παρένθεσης:

$$2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 2x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 4x + 4 =$$

$$= 2x^2(x - 2) - 2x^2 + 4x - x^2 + 4 =$$

$$= 2x^2(x - 2) - 2x(x - 2) - (x - 2)(x + 2) =$$

$$= (x - 2)(2x^2 - 3x - 2) = (x - 2)^2(2x + 1).$$

Με όμοιο τρόπο παραγοντοποιούμε και τις άλλες παρενθέσεις, οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$(x - 2)^2(2x + 1) + (y - 2)^2(2y + 1) + (z - 2)^2(2z + 1) = 0.$$

Επειδή όμως $x, y, z > 0$, θα πρέπει $x = y = z = 2$, οπότε $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

Παρατήρηση

Η παραγοντοποίηση των παρενθέσεων μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια του σχήματος Horner (αναζητώντας λύσεις μεταξύ των διαιρετών του 4).

2^{ος} τρόπος: Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο x είναι ο μικρότερος από τους τρεις αριθμούς. Επομένως, $x \leq y$ και $x \leq z$. Επομένως, η τρίτη εξίσωση δίνει

$$2x^3 - 7x^2 + 4x \leq 2z^3 - 7x^2 + 4y = -4 \quad (1)$$

Όπως και στον 1^ο τρόπο, έχουμε ότι $2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = (x - 2)^2(2x + 1)$, επομένως η (1) δίνει ότι $(x - 2)^2(2x + 1) \leq 0$ (2).

Πρέπει λοιπόν να ισχύει η ισότητα στη (2), άρα και στην (1), επομένως, $x = y = z = 2$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Να προσδιορίσετε όλους τους τετραψήφιους ακέραιους

$$N = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta, 0 < \alpha < \gamma,$$

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος

$$(\alpha - 1)^2 + \alpha^2 + \dots + \gamma^2 + (\gamma + 1)^2,$$

στο οποίο αθροίζουμε όλα τα τετράγωνα των μη αρνητικών ακεραίων από τον $\alpha - 1$ μέχρι και τον $\gamma + 1$.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε

$$N = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta = 8[(\alpha - 1)^2 + \alpha^2 + \dots + \gamma^2 + (\gamma + 1)^2] \leq 8(0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2) = 3080,$$

από την οποία προκύπτει ότι: $\alpha \leq 3$. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

Αν $\alpha = 3$, και $\gamma \leq 8$ έχουμε

$$8[2^2 + \dots + \gamma^2 + (\gamma + 1)^2] \leq 8[2^2 + \dots + 8^2 + 9^2] < 3000, \text{ αδύνατο.}$$

Άρα πρέπει $\gamma = 9$.

Για $\gamma = 9$, δεν έχουμε επίσης λύση γιατί

$$8(2^2 + \dots + 8^2 + 9^2 + 10^2) = 3072, \text{ άτοπο.}$$

Αν $\alpha = 2$, τότε αν $\gamma \leq 7$ έχουμε: $8[1^2 + \dots + \gamma^2 + (\gamma + 1)^2] \leq 8[1^2 + \dots + 8^2] < 2000$, αδύνατο. Άρα $\gamma = 8$ ή $\gamma = 9$.

Για $\gamma = 8$ έχουμε $8[1^2 + \dots + 8^2 + 9^2] = 2280$, δεκτή.

Για $\gamma = 9$ έχουμε $8[1^2 + \dots + 8^2 + 9^2 + 10^2] > 3000$, αδύνατο.

Αν $\alpha = 1$, τότε έχουμε ότι για $\gamma \geq 8$ ο αριθμός είναι μεγαλύτερος από $8[1^2 + \dots + 8^2 + 9^2] = 2280$, αδύνατο.

Επίσης για $\gamma \leq 5$ έχουμε ότι ο αριθμός είναι μικρότερος από $8[1^2 + \dots + 6^2] = 728$, άτοπο. Επομένως $\gamma = 6$ ή $\gamma = 7$. Όμως και οι δύο περιπτώσεις δεν οδηγούν σε λύση, αφού για $\gamma = 6$ ο αριθμός θα έπρεπε να είναι ίσος με $8[1^2 + \dots + 7^2] = 1120$, αδύνατο. Τέλος για $\gamma = 7$ έχουμε ότι ο αριθμός θα έπρεπε να είναι ίσος με $8[1^2 + \dots + 8^2] = 1632$, επίσης αδύνατο.

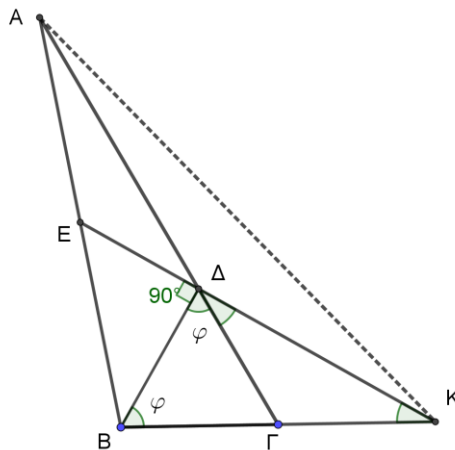
Επομένως, μοναδική λύση είναι ο αριθμός 2280.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma > B\Gamma$. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma B$. Αν η κάθετη στο σημείο Δ προς την ευθεία ΔB τέμνει την πλευρά AB στο μέσο της, να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 3 \cdot B\Gamma$.

Λύση

Έστω E το μέσον της AB . Έστω ότι η κάθετη ευθεία προς την ευθεία ΔB στο σημείο Δ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο K . Επειδή είναι $\Gamma B = \Gamma\Delta$, έπεται ότι $\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{B\Delta\Gamma} = \varphi$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta K$ έχουμε ότι $\widehat{\Gamma\Delta K} = \widehat{\Gamma\hat{K}\Delta} = 90^\circ - \varphi$. Επομένως, το τρίγωνο $\Gamma\Delta K$ είναι ισοσκελές με συνέπεια $\Gamma K = \Gamma\Delta = \Gamma B$, δηλαδή το Γ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος BK και η ευθεία $A\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου ABK .



Επειδή η ευθεία $K\Delta$ περνάει από το μέσο της πλευράς AB , έπεται ότι το σημείο Δ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου ABK . Επομένως έχουμε $A\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma$ και

$$A\Gamma = A\Delta + \Delta\Gamma = 2 \cdot \Delta\Gamma + \Delta\Gamma = 3 \cdot \Delta\Gamma = 3 \cdot B\Gamma.$$

2ος τρόπος: Ονομάζουμε M το μέσον της AB . Θεωρούμε τα μέσα N, P των τμημάτων $A\Delta$ και ΔB . Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $N\Delta = \Delta\Gamma$.

Στο τρίγωνο $AB\Delta$, η MN ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, άρα

$$MN \parallel \frac{\Delta B}{2} = \Delta P \quad (1)$$

Από την παραλληλία προκύπτει ότι $\Delta M \perp MN$ και $\angle M\Delta N = \angle B\Delta\Gamma$ (2).

Από τις (1), (2) έπεται ότι τα τρίγωνα $M\Delta N$ και $\Gamma\Delta P$ είναι ίσα, άρα $\Gamma\Delta = \Delta N$, που είναι το ζητούμενο.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους το σύστημα:

$$4\alpha^2 = 6\beta^2 + 5\gamma^2 + 25$$

$$13\alpha = 3\beta + 2\gamma + 34.$$

Λύση

Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι ο γ πρέπει να είναι περιττός ακέραιος, αφού διαφορετικά θα προέκυπτε ότι ο ακέραιος $4\alpha^2 - 6\beta^2 - 5\gamma^2 = 25$ είναι άρτιος.

Επίσης από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$.

Πράγματι, αν ήταν $\alpha \leq \beta$ ή $\alpha \leq \gamma$, τότε θα είχαμε $4\alpha^2 < 6\beta^2 + 5\gamma^2 + 25$.

Από τη δεύτερη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$13\alpha = 3\beta + 2\gamma + 34 < 5\alpha + 34 \Rightarrow 8\alpha < 34 \Rightarrow \alpha \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Η περίπτωση $\alpha = 1$ αποκλείεται, αφού $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$. Ομοίως για $\alpha = 2$ προκύπτει το σύστημα: $6\beta^2 + 5\gamma^2 = -9, 3\beta + 2\gamma = -8$, (αδύνατο). Για $\alpha = 3$ προκύπτει το σύστημα: $6\beta^2 + 5\gamma^2 = 11, 3\beta + 2\gamma = 5$ με μοναδική λύση στους θετικούς ακέραιους $\beta = \gamma = 1$. Για $\alpha = 4$ προκύπτει το σύστημα $6\beta^2 + 5\gamma^2 = 39, 3\beta + 2\gamma = 18$, το οποίο δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, 1, 1)$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(2f(x) + y) = f(f(y) + x) + x. (*)$$

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει $z \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(z) = \alpha$ και ότι η f είναι 1-1.

(β) Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f που ικανοποιούν την (*).

Λύση

(α) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν θέσουμε όπου y το $-2f(x)$ παίρνουμε

$$f(0) - x = f(f(-2f(x)) + x) \quad (1)$$

Επομένως, αν θέσουμε όπου x το $-\alpha + f(0)$ στην (1), βρίσκουμε z ώστε $f(z) = \alpha$.

Για το 1-1, παίρνουμε y_0 ώστε $f(y_0) = 0$. Για y το y_0 η (1) δίνει

$$f(2f(x) + y_0) = f(x) + x \quad (2).$$

Επομένως, αν x_1, x_2 με $f(x_1) = f(x_2)$, έχουμε $f(2f(x_1) + y_0) = f(2f(x_2) + y_0)$, άρα από την (2) $f(x_1) + x_1 = f(x_2) + x_2$, άρα $x_1 = x_2$.

(β) Αν θέσουμε όπου x το 0 στην (*), παίρνουμε $f(2f(0) + y) = f(f(y))$ και αφού η f είναι 1-1 θα ισχύει $f(y) = 2f(0) + y$, δηλαδή $f(y) = y + c$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (*) παίρνουμε $f(2(x + c) + y) = f(x + y + c) + x \Rightarrow$

$$2x + y + 3c = 2x + y + 2c, \text{ οπότε } c = 0.$$

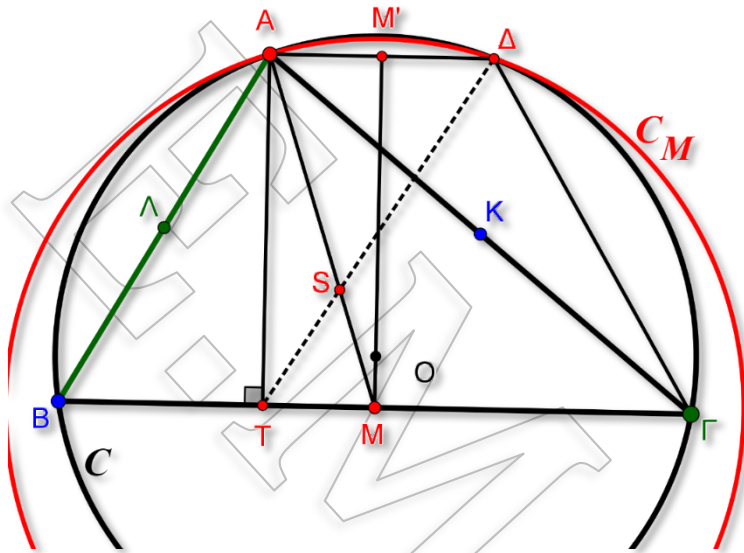
Τελικά η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$), εγγεγραμμένο σε κύκλο C με κέντρο O και ακτίνα R . Θεωρούμε τα μέσα M, K, Λ των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$ (αντίστοιχα) καθώς και τους κύκλους $C_M(M, MA)$, $C_K(K, KB)$, $C_\Lambda(\Lambda, \Lambda\Gamma)$ με κέντρα τα σημεία M, K, Λ και ακτίνες $MA, KB, \Lambda\Gamma$, αντίστοιχα, οι οποίοι τέμνουν τον κύκλο C στα σημεία Δ, E, Z αντίστοιχα. Αν T, P, Σ είναι οι προβολές των κορυφών A, B, Γ , αντίστοιχα, του τριγώνου $AB\Gamma$ προς τις απέναντι πλευρές του, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΔT , EP και $Z\Sigma$ συντρέχουν.

Λύση

Έστω ότι ο κύκλος με κέντρο το μέσο M της $B\Gamma$ και ακτίνα MA (C_M), τέμνει το κύκλο C στο σημείο Δ . Έστω ακόμη T η προβολή της κορυφής A στη πλευρά. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία ΔT περνάει από σταθερό σημείο.



Η OM είναι διάκεντρος των κύκλων C και C_M . Άρα η OM είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής AD των δύο κύκλων. Η OM είναι (επίσης) μεσοκάθετος της χορδής $B\Gamma$ του κύκλου C . Οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, εγγεγραμμένο στον κύκλο C . Έστω ότι η προέκταση της OM τέμνει την AD στο σημείο M' . Τότε το M' θα είναι το μέσο της AD , οπότε θα ισχύει:

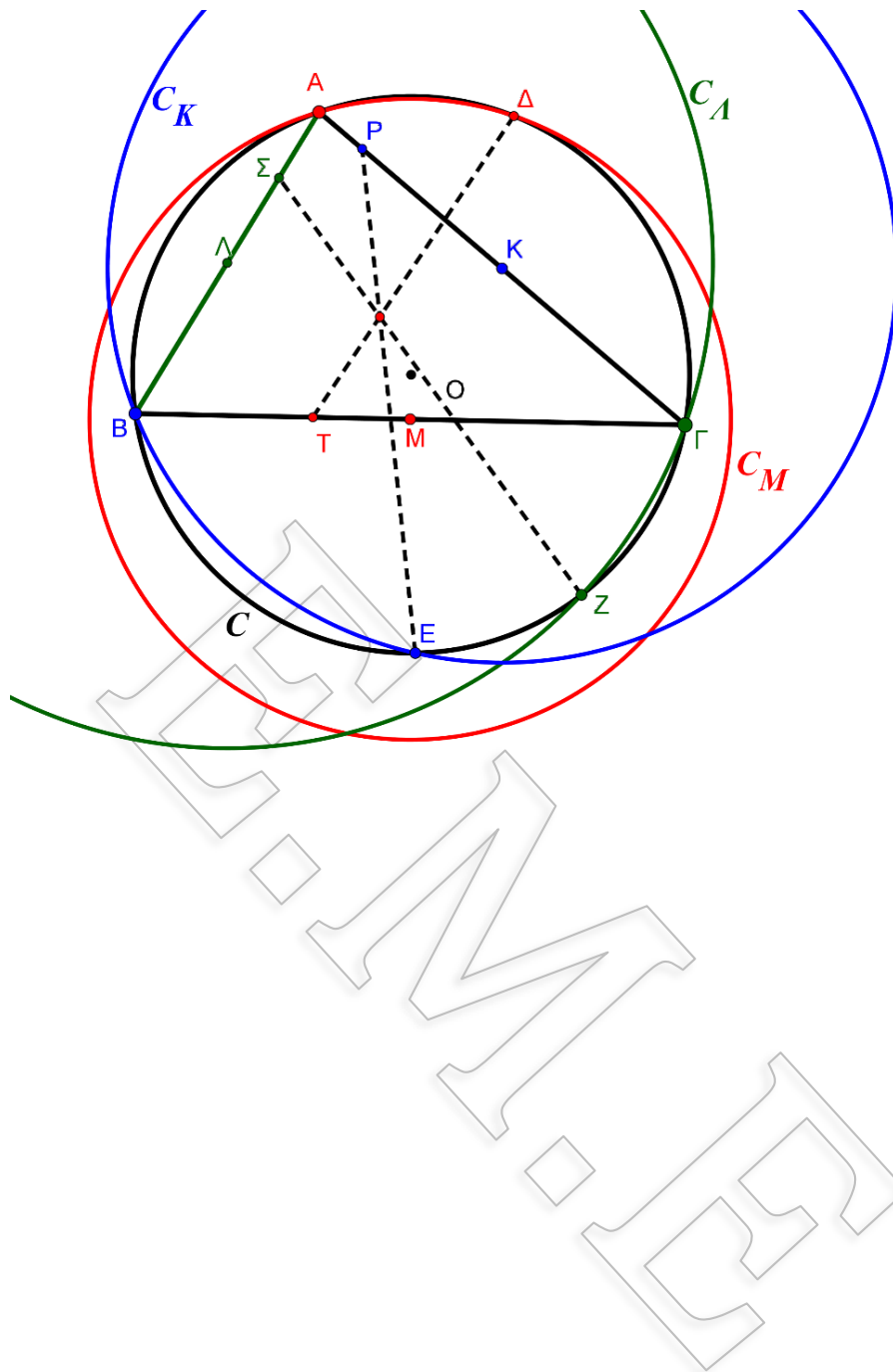
$$MT = AM' = \frac{AD}{2} \quad (1).$$

Αν τώρα οι AM και ΔT τέμνονται στο σημείο S . Τότε τα τρίγωνα $A\Delta S$ και MTS είναι όμοια και κατά συνέπεια:

$$\frac{SA}{SM} = \frac{AM}{MT} \stackrel{(1)}{=} 2.$$

Άρα το σημείο S είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι οι EP και $Z\Sigma$ διέρχονται από το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.





ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
83ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2022

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-21)^7}{7^7} + \frac{(-15)^7}{(-5)^7} + 4044 \right) : \left(\frac{(-14)^3}{7^3} + \frac{(-18)^3}{(-9)^3} + 2 \right)$$

Λύση
 Έχουμε

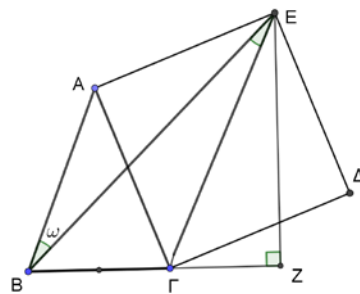
$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-21)^7}{7^7} + \frac{(-15)^7}{(-5)^7} + 4044 \right) : \left(\frac{(-14)^3}{7^3} + \frac{(-18)^3}{(-9)^3} + 2 \right) \\ &= \left(\left(\frac{-21}{7} \right)^7 + \left(\frac{-15}{-5} \right)^7 + 4044 \right) : \left(\left(\frac{-14}{7} \right)^3 + \left(\frac{-18}{-9} \right)^3 + 2 \right) \\ &= \left((-3)^7 + 3^7 + 4044 \right) : \left((-2)^3 + 2^3 + 2 \right) \\ &= \left(-3^7 + 3^7 + 4044 \right) : \left(-2^3 + 2^3 + 2 \right) = 4044 : 2 = 2022. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

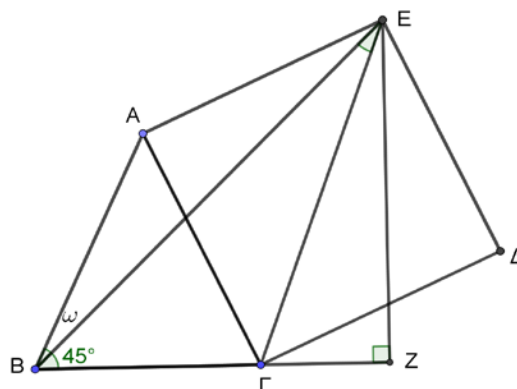
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με AB = ΑΓ και το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο. Αν $\widehat{ABE} = \omega$ και $\widehat{EZ\Gamma} = 90^\circ$, τότε:

(1) Να βρείτε συναρτήσει του ω τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ABΓ.

(2) Να αποδείξετε ότι: BZ = EZ



Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή $AE = AG = AB$, το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{AEB} = \omega$. Επειδή $\hat{BAE} = \hat{A} + 90^\circ$, έπεται ότι:

$$\hat{A} + 90^\circ + 2\omega = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - 2\omega.$$

Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2\omega)}{2} = 45^\circ + \omega.$$

(β) Έχουμε $\hat{EBZ} = \hat{B} - \omega = (45^\circ + \omega) - \omega = 45^\circ$. Επειδή το τρίγωνο EZB είναι ορθογώνιο με $\hat{EZB} = 90^\circ$, έπεται ότι $\hat{BEZ} = 90^\circ - \hat{EBZ} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο EZB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $BZ = EZ$.

Πρόβλημα 3

Ο κύριος Γιάννης αγοράζει μια σακούλα καραμέλες για τα δύο παιδιά του, Γιώργο και Δημήτρη, και τους δίνει κάποιες από αυτές τυχαία. Όταν πηγαίνουν στο σπίτι διαπιστώνουν ότι ο Γιώργος έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες από τον Δημήτρη και επτά φορές περισσότερες από αυτές που έμειναν στη σακούλα. Τα παιδιά τρώνε κάποιες από αυτές και την άλλη μέρα παίρνουν κάποιες ακόμη από τη σακούλα. Διαπιστώνουν ότι ο Δημήτρης έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες και από τον Γιώργο και από αυτές που απέμειναν στη σακούλα. Να αποδείξετε ότι τα παιδιά έφαγαν τουλάχιστον τα $\frac{3}{4}$ από τις συνολικές καραμέλες που αγόρασε ο κύριος Γιάννης.

Λύση

Έστω x οι καραμέλες που πήρε την πρώτη μέρα ο Δημήτρης. Τότε $7x$ είναι οι καραμέλες του Γιώργου και x είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως ο κύριος Γιάννης αγόρασε συνολικά $9x$ καραμέλες.

Έστω y οι καραμέλες του Γιώργου την δεύτερη μέρα. Τότε $7y$ είναι οι καραμέλες του Δημήτρη και y είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως την δεύτερη μέρα περίσσεψαν $9y$ καραμέλες. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά έφαγαν $9x - 9y$ καραμέλες.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$9x - 9y \geq \frac{3}{4} \cdot (9x) \Leftrightarrow x \geq 4y.$$

Θα αποδείξουμε ότι η τελευταία ισχύει. Πράγματι, οι καραμέλες που είχε ο Δημήτρης συν τις καραμέλες της σακούλας την πρώτη μέρα, είναι σίγουρα περισσότερες από τις αντίστοιχες τη δεύτερα μέρα.

1^η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $x + x = 2x$

2^η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $7y + y = 8y$

Επομένως $2x \geq 8y$ και το ζητούμενο έπεται.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5} \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3 \right)$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5} \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left(\left(\left(\frac{-22}{2} \right)^5 + \left(\frac{-44}{-4} \right)^5 \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\left(\frac{-10}{2} \right)^{10} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left(\left((-11)^5 + (+11)^5 \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left((-5)^{10} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left((-11^5 + 11^5) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : (0 + 10^3) \\ &= (0 \cdot (-2022)^2 + 10^6) : (+10) = 10^6 : 10^3 = 10^3. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

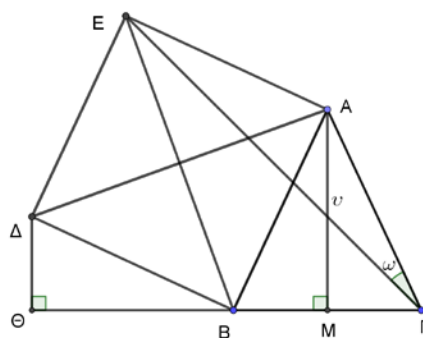
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$ και το τετράπλευρο ABΔΕ είναι τετράγωνο.

Αν είναι $\widehat{A\Gamma E} = \omega$, $\widehat{\Delta\Theta B} = 90^\circ = \widehat{A\hat{M}B}$

και $B\Gamma = \alpha$, $AM = \nu$, τότε να βρείτε:

(1) Το μέτρο της γωνίας $E\hat{\Gamma}B$.

(2) Το εμβαδόν του τραπέζιου ΑΜΘΔ συναρτήσει των α και ν .



Λύση

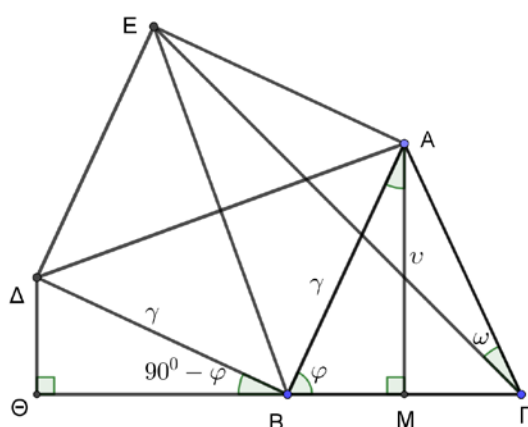
(α) Επειδή $AE = AB = AG$, το τρίγωνο $AΓΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}\hat{E}\Gamma = \omega$.
Επειδή $\hat{\Gamma}\hat{A}E = \hat{A} + 90^\circ$, έπεται ότι:

$$\hat{A} + 90^\circ + 2\omega = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - 2\omega.$$

Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2\omega)}{2} = 45^\circ + \omega.$$

Άρα έχουμε: $\hat{E}\hat{\Gamma}B = \hat{A}\hat{\Gamma}B - \omega = (45^\circ + \omega) - \omega = 45^\circ$.



Σχήμα 2

(β) (1ος τρόπος)

Επειδή $\hat{A}\hat{B}\Delta = 90^\circ$, οι γωνίες $\hat{A}\hat{B}M$ και $\hat{\Delta}\hat{B}\Theta$ έχουν άθροισμα 90° , δηλαδή είναι συμπληρωματικές. Έτσι, αν $\hat{A}\hat{B}M = \varphi$, τότε $\hat{\Delta}\hat{B}\Theta = 90^\circ - \varphi$.

Έστω $AB = B\Delta = \gamma$. Τότε, αφού $\hat{B}\hat{\Delta}\Theta = 90^\circ - \hat{\Delta}\hat{B}\Theta = \varphi$, έχουμε:

$$\Delta\Theta = \gamma \cdot \eta\mu(90^\circ - \varphi) = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu \hat{B}\hat{\Delta}\Theta = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu \varphi = BM = \frac{\alpha}{2}.$$

$$B\Theta = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \varphi) = \gamma \cdot \eta\mu \hat{B}\hat{\Delta}\Theta = \gamma \cdot \eta\mu \varphi = AM = \nu.$$

Άρα έχουμε:

$$(\Delta M \Theta \Delta) = \frac{1}{2} \cdot (\Delta M + \Theta \Delta) \cdot M\Theta = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

(β) 2ος τρόπος

Τα τρίγωνα AMB και $B\Theta\Delta$ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{M} = \hat{\Theta} = 90^\circ$ και επιπλέον έχουν:

1. $AB = B\Delta$, αφού το τετράπλευρο $AB\Delta E$ είναι τετράγωνο και
2. $\hat{M}\hat{A}B = \hat{\Theta}\hat{B}\Delta$, αφού

$$\widehat{MAB} = \frac{\widehat{A}}{2} = 45^\circ - \omega, \quad \widehat{B\Delta} = 180^\circ - \widehat{AB\Delta} - \widehat{B} = 180^\circ - 90^\circ - (45^\circ + \omega) = 45^\circ - \omega$$

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα AMB και BΘΔ είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$B\Theta = AM = \nu \quad \text{και} \quad \Delta\Theta = BM = \frac{\alpha}{2}.$$

Άρα έχουμε:

$$(AM\Theta\Delta) = \frac{1}{2} \cdot (AM + \Theta\Delta) \cdot M\Theta = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Πρόβλημα 3

Ο πληθυσμός μιας πόλης στην τελευταία απογραφή ήταν A κάτοικοι, όπου $35000 < A < 40000$. Δίνεται ότι ο αριθμός A , όταν διαιρεθεί με το 7 δίνει υπόλοιπο 1, όταν διαιρεθεί με το 9 δίνει υπόλοιπο 1 και όταν διαιρεθεί με το 64 δίνει υπόλοιπο 3. Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό της πόλης.

Λύση

Σύμφωνα με τις υποθέσεις, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ, λ, μ , τέτοιοι ώστε:

$$\begin{cases} A = 7\kappa + 1 \\ A = 9\lambda + 1 \\ A = 64\mu + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - 1 = 7\kappa \\ A - 1 = 9\lambda \\ A - 1 = 64\mu + 2 \end{cases} \Rightarrow A - 1 = 7\kappa = 9\lambda = 64\mu + 2$$

$$\Rightarrow \frac{A-1}{63} = \frac{\kappa}{9} = \frac{\lambda}{7} = \frac{64\mu+2}{63} = \omega \in \mathbb{Z} \Rightarrow \kappa = 9\omega, \quad \lambda = 7\omega \quad \text{και} \quad \frac{64\mu+2}{63} = \omega \in \mathbb{Z}.$$

Άρα ο αριθμός 63 πρέπει να διαιρεί τον αριθμό $64\mu + 2$. Έχουμε:

$$\frac{64\mu+2}{63} = \frac{63\mu+\mu+2}{63} = \mu + \frac{\mu+2}{63} \Rightarrow \mu + 2 = 63\nu, \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu = 63\nu - 2.$$

Επομένως, έχουμε:

$$A = 64\mu + 3 = 64 \cdot 63\nu - 128 + 3 = 4032\nu - 125.$$

Επειδή $35000 < A < 40000$, έχουμε:

$$35000 < 4032\nu - 125 < 40000 \Leftrightarrow 35125 < 4032\nu < 40125$$

$$\Leftrightarrow \frac{35125}{4032} < \nu < \frac{40125}{4032} \Leftrightarrow 8,71 < \nu < 9,95 \Leftrightarrow \nu = 9,$$

αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, ο πληθυσμός της πόλης είναι

$$A = 4032 \cdot 9 - 125 = 36163.$$

2ος τρόπος

Αφού $35000 = 7 \cdot 5000$, ο πρώτος ακέραιος, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 7 είναι ο $35000 = 7 \cdot 5000 + 1 = 35001$.

Έτσι, έχουμε τους αριθμούς

$$35001, 35008, 35015, 35022, 35029, \dots$$

Αφού το άθροισμα των ψηφίων του 35001 είναι 9, ο 35001 είναι πολλαπλάσιο του. Πράγματι, $35001 = 9 \cdot 3889$, οπότε ο πρώτος ακέραιος ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 9 είναι ο $35002 (= 9 \cdot 3889 + 1)$. Έτσι, έχουμε τους αριθμούς

$$35002, 35011, 35020, 35029, 35038, \dots$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος κοινός αριθμός από τις παραπάνω λίστες είναι ο 35029, και ότι κάθε επόμενος προκύπτει με πρόσθεση του $EKP(7, 9) = 63$, οπότε έχουμε τους αριθμούς της μορφής

$$35029 + 63k,$$

με k μη αρνητικό ακέραιο.

Αφού $35000 = 546 \cdot 64 + 56$, ο πρώτος ακέραιος, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 3 όταν διαιρείται με το 64 είναι ο $547 \cdot 64 + 3 = 35011$. Κάθε επόμενος τέτοιος αριθμός προκύπτει με πρόσθεση του 64, οπότε έχουμε τους αριθμούς

$$35011 + 64\lambda,$$

με λ μη αρνητικό ακέραιο.

Θέλουμε να καλύψουμε τη διαφορά $35029 - 35011 = 18$ προσθέτοντας τη διαφορά $64 - 63 = 1$, κατάλληλο αριθμό φορές, δηλαδή 18.

Πιο αναλυτικά, θέλουμε

$$35029 + 63k = 35011 + 64\lambda,$$

δηλαδή

$$64\lambda - 63k = 18 \tag{1}$$

για κατάλληλους ακέραιους.

Αφού $64 - 63 = 1$, μια προφανής λύση είναι η $k = \lambda = 18$, και άρα

$$A = 35011 + 64 \cdot 18 = 36163.$$



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
83ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2022

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-21)^7}{7^7} + \frac{(-15)^7}{(-5)^7} + 4044 \right) : \left(\frac{(-14)^3}{7^3} + \frac{(-18)^3}{(-9)^3} + 2 \right)$$

Λύση
 Έχουμε

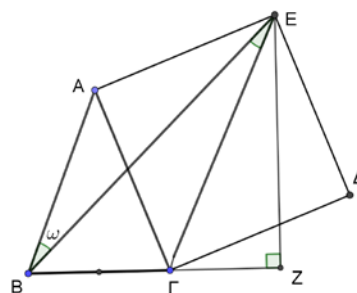
$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-21)^7}{7^7} + \frac{(-15)^7}{(-5)^7} + 4044 \right) : \left(\frac{(-14)^3}{7^3} + \frac{(-18)^3}{(-9)^3} + 2 \right) \\ &= \left(\left(\frac{-21}{7} \right)^7 + \left(\frac{-15}{-5} \right)^7 + 4044 \right) : \left(\left(\frac{-14}{7} \right)^3 + \left(\frac{-18}{-9} \right)^3 + 2 \right) \\ &= \left((-3)^7 + 3^7 + 4044 \right) : \left((-2)^3 + 2^3 + 2 \right) \\ &= \left(-3^7 + 3^7 + 4044 \right) : \left(-2^3 + 2^3 + 2 \right) = 4044 : 2 = 2022. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

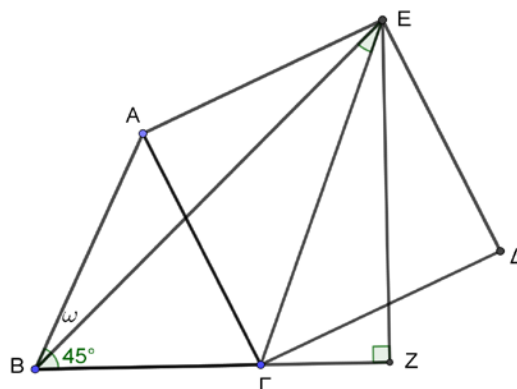
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με AB = ΑΓ και το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο. Αν $\widehat{ABE} = \omega$ και $\widehat{EZ\Gamma} = 90^\circ$, τότε:

(1) Να βρείτε συναρτήσει του ω τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ABΓ.

(2) Να αποδείξετε ότι: BZ = EZ



Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή $AE = AG = AB$, το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές, οπότε $\angle AEB = \omega$.
Επειδή $\angle BAE = \hat{A} + 90^\circ$, έπεται ότι:

$$\hat{A} + 90^\circ + 2\omega = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - 2\omega.$$

Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο ABG έχουμε:

$$\hat{B} = \hat{G} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2\omega)}{2} = 45^\circ + \omega.$$

(β) Έχουμε $\angle EBZ = \hat{B} - \omega = (45^\circ + \omega) - \omega = 45^\circ$. Επειδή το τρίγωνο EZB είναι ορθογώνιο με $\angle EZB = 90^\circ$, έπεται ότι $\angle BEZ = 90^\circ - \angle EBZ = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο EZB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $BZ = EZ$.

Πρόβλημα 3

Ο κύριος Γιάννης αγοράζει μια σακούλα καραμέλες για τα δύο παιδιά του, Γιώργο και Δημήτρη, και τους δίνει κάποιες από αυτές τυχαία. Όταν πηγαίνουν στο σπίτι διαπιστώνουν ότι ο Γιώργος έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες από τον Δημήτρη και επτά φορές περισσότερες από αυτές που έμειναν στη σακούλα. Τα παιδιά τρώνε κάποιες από αυτές και την άλλη μέρα παίρνουν κάποιες ακόμη από τη σακούλα. Διαπιστώνουν ότι ο Δημήτρης έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες και από τον Γιώργο και από αυτές που απέμειναν στη σακούλα. Να αποδείξετε ότι τα παιδιά έφαγαν τουλάχιστον τα $\frac{3}{4}$ από τις συνολικές καραμέλες που αγόρασε ο κύριος Γιάννης.

Λύση

Έστω x οι καραμέλες που πήρε την πρώτη μέρα ο Δημήτρης. Τότε $7x$ είναι οι καραμέλες του Γιώργου και x είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως ο κύριος Γιάννης αγόρασε συνολικά $9x$ καραμέλες.

Έστω y οι καραμέλες του Γιώργου την δεύτερη μέρα. Τότε $7y$ είναι οι καραμέλες του Δημήτρη και y είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως την δεύτερη μέρα περίσσεψαν $9y$ καραμέλες. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά έφαγαν $9x - 9y$ καραμέλες.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$9x - 9y \geq \frac{3}{4} \cdot (9x) \Leftrightarrow x \geq 4y.$$

Θα αποδείξουμε ότι η τελευταία ισχύει. Πράγματι, οι καραμέλες που είχε ο Δημήτρης συν τις καραμέλες της σακούλας την πρώτη μέρα, είναι σίγουρα περισσότερες από τις αντίστοιχες τη δεύτερα μέρα.

1^η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $x + x = 2x$

2^η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $7y + y = 8y$

Επομένως $2x \geq 8y$ και το ζητούμενο έπεται.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5} \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3 \right)$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5} \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left(\left(\left(\frac{-22}{2} \right)^5 + \left(\frac{-44}{-4} \right)^5 \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\left(\frac{-10}{2} \right)^{10} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left(\left((-11)^5 + (+11)^5 \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left((-5)^{10} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left((-11^5 + 11^5) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : (0 + 10^3) \\ &= (0 \cdot (-2022)^2 + 10^6) : (+10) = 10^6 : 10^3 = 10^3. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

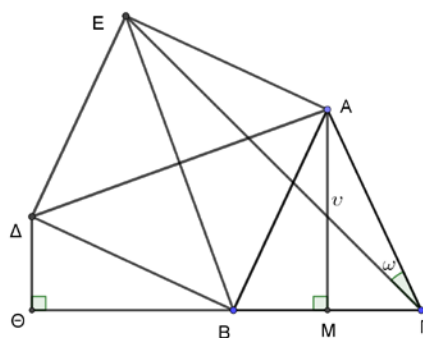
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$ και το τετράπλευρο ABΔΕ είναι τετράγωνο.

Αν είναι $\widehat{A\Gamma E} = \omega$, $\widehat{\Delta\Theta B} = 90^\circ = \widehat{A\hat{M}B}$

και $B\Gamma = \alpha$, $AM = \nu$, τότε να βρείτε:

(1) Το μέτρο της γωνίας $E\hat{\Gamma}B$.

(2) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΜΘΔ συναρτήσει των α και ν .



Λύση

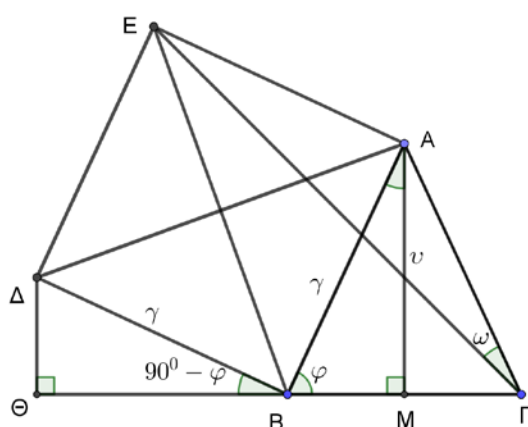
(α) Επειδή $AE = AB = AG$, το τρίγωνο $AΓΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}\hat{E}\Gamma = \omega$.
Επειδή $\hat{\Gamma}\hat{A}E = \hat{A} + 90^\circ$, έπεται ότι:

$$\hat{A} + 90^\circ + 2\omega = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - 2\omega.$$

Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2\omega)}{2} = 45^\circ + \omega.$$

Άρα έχουμε: $\hat{E}\hat{\Gamma}B = \hat{A}\hat{\Gamma}B - \omega = (45^\circ + \omega) - \omega = 45^\circ$.



Σχήμα 2

(β) (1ος τρόπος)

Επειδή $\hat{A}\hat{B}\Delta = 90^\circ$, οι γωνίες $\hat{A}\hat{B}M$ και $\hat{\Delta}\hat{B}\Theta$ έχουν άθροισμα 90° , δηλαδή είναι συμπληρωματικές. Έτσι, αν $\hat{A}\hat{B}M = \varphi$, τότε $\hat{\Delta}\hat{B}\Theta = 90^\circ - \varphi$.

Έστω $AB = B\Delta = \gamma$. Τότε, αφού $\hat{B}\hat{\Delta}\Theta = 90^\circ - \hat{B}\hat{\Delta}\Theta = \varphi$, έχουμε:

$$\Delta\Theta = \gamma \cdot \eta\mu(90^\circ - \varphi) = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B}\hat{\Delta}\Theta = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = BM = \frac{\alpha}{2}.$$

$$B\Theta = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \varphi) = \gamma \cdot \eta\mu\hat{B}\hat{\Delta}\Theta = \gamma \cdot \eta\mu\varphi = AM = \nu.$$

Άρα έχουμε:

$$(\Delta M \Theta \Delta) = \frac{1}{2} \cdot (\Delta M + \Theta \Delta) \cdot M\Theta = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

(β) 2ος τρόπος

Τα τρίγωνα AMB και $B\Theta\Delta$ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{M} = \hat{\Theta} = 90^\circ$ και επιπλέον έχουν:

1. $AB = B\Delta$, αφού το τετράπλευρο $AB\Delta E$ είναι τετράγωνο και
2. $\hat{M}\hat{A}B = \hat{\Theta}\hat{B}\Delta$, αφού

$$\widehat{MAB} = \frac{\widehat{A}}{2} = 45^\circ - \omega, \quad \widehat{B\Delta} = 180^\circ - \widehat{AB\Delta} - \widehat{B} = 180^\circ - 90^\circ - (45^\circ + \omega) = 45^\circ - \omega$$

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα AMB και BΘΔ είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$B\Theta = AM = \nu \quad \text{και} \quad \Delta\Theta = BM = \frac{\alpha}{2}.$$

Άρα έχουμε:

$$(\text{AM}\Theta\Delta) = \frac{1}{2} \cdot (\text{AM} + \Theta\Delta) \cdot M\Theta = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Πρόβλημα 3

Ο πληθυσμός μιας πόλης στην τελευταία απογραφή ήταν A κάτοικοι, όπου $35000 < A < 40000$. Δίνεται ότι ο αριθμός A , όταν διαιρεθεί με το 7 δίνει υπόλοιπο 1, όταν διαιρεθεί με το 9 δίνει υπόλοιπο 1 και όταν διαιρεθεί με το 64 δίνει υπόλοιπο 3. Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό της πόλης.

Λύση

Σύμφωνα με τις υποθέσεις, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ, λ, μ , τέτοιοι ώστε:

$$\begin{cases} A = 7\kappa + 1 \\ A = 9\lambda + 1 \\ A = 64\mu + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - 1 = 7\kappa \\ A - 1 = 9\lambda \\ A - 1 = 64\mu + 2 \end{cases} \Rightarrow A - 1 = 7\kappa = 9\lambda = 64\mu + 2$$

$$\Rightarrow \frac{A-1}{63} = \frac{\kappa}{9} = \frac{\lambda}{7} = \frac{64\mu+2}{63} = \omega \in \mathbb{Z} \Rightarrow \kappa = 9\omega, \quad \lambda = 7\omega \quad \text{και} \quad \frac{64\mu+2}{63} = \omega \in \mathbb{Z}.$$

Άρα ο αριθμός 63 πρέπει να διαιρεί τον αριθμό $64\mu + 2$. Έχουμε:

$$\frac{64\mu+2}{63} = \frac{63\mu+\mu+2}{63} = \mu + \frac{\mu+2}{63} \Rightarrow \mu + 2 = 63\nu, \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu = 63\nu - 2.$$

Επομένως, έχουμε:

$$A = 64\mu + 3 = 64 \cdot 63\nu - 128 + 3 = 4032\nu - 125.$$

Επειδή $35000 < A < 40000$, έχουμε:

$$35000 < 4032\nu - 125 < 40000 \Leftrightarrow 35125 < 4032\nu < 40125$$

$$\Leftrightarrow \frac{35125}{4032} < \nu < \frac{40125}{4032} \Leftrightarrow 8,71 < \nu < 9,95 \Leftrightarrow \nu = 9,$$

αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, ο πληθυσμός της πόλης είναι

$$A = 4032 \cdot 9 - 125 = 36163.$$

2ος τρόπος

Αφού $35000 = 7 \cdot 5000$, ο πρώτος ακέραιος, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 7 είναι ο $35000 = 7 \cdot 5000 + 1 = 35001$.

Έτσι, έχουμε τους αριθμούς

$$35001, 35008, 35015, 35022, 35029, \dots$$

Αφού το άθροισμα των ψηφίων του 35001 είναι 9, ο 35001 είναι πολλαπλάσιο του. Πράγματι, $35001 = 9 \cdot 3889$, οπότε ο πρώτος ακέραιος ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 9 είναι ο $35002 (= 9 \cdot 3889 + 1)$. Έτσι, έχουμε τους αριθμούς

$$35002, 35011, 35020, 35029, 35038, \dots$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος κοινός αριθμός από τις παραπάνω λίστες είναι ο 35029, και ότι κάθε επόμενος προκύπτει με πρόσθεση του $EKP(7, 9) = 63$, οπότε έχουμε τους αριθμούς της μορφής

$$35029 + 63k,$$

με k μη αρνητικό ακέραιο.

Αφού $35000 = 546 \cdot 64 + 56$, ο πρώτος ακέραιος, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 3 όταν διαιρείται με το 64 είναι ο $547 \cdot 64 + 3 = 35011$. Κάθε επόμενος τέτοιος αριθμός προκύπτει με πρόσθεση του 64, οπότε έχουμε τους αριθμούς

$$35011 + 64\lambda,$$

με λ μη αρνητικό ακέραιο.

Θέλουμε να καλύψουμε τη διαφορά $35029 - 35011 = 18$ προσθέτοντας τη διαφορά $64 - 63 = 1$, κατάλληλο αριθμό φορές, δηλαδή 18.

Πιο αναλυτικά, θέλουμε

$$35029 + 63k = 35011 + 64\lambda,$$

δηλαδή

$$64\lambda - 63k = 18 \tag{1}$$

για κατάλληλους ακέραιους.

Αφού $64 - 63 = 1$, μια προφανής λύση είναι η $k = \lambda = 18$, και άρα

$$A = 35011 + 64 \cdot 18 = 36163.$$



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
83ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2022

Ενδεικτικές λύσεις

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \quad \frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} = 1.$$

Λύση

Για $x, y \neq 0$ θέτουμε $\frac{1}{x} = \varphi \neq 0, \frac{1}{y} = \omega \neq 0$, οπότε το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \varphi + \omega = 1 \\ \frac{\varphi^2}{\omega} + \frac{\omega^2}{\varphi} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi + \omega = 1 \\ \varphi^3 + \omega^3 = \varphi\omega \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 1 - \omega \\ (1 - \omega)^3 + \omega^3 = (1 - \omega)\omega \end{array} \right\} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 1 - \omega \\ 1 - 3\omega + 3\omega^2 - \omega^3 + \omega^3 = \omega - \omega^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 1 - \omega \\ 1 - 4\omega + 4\omega^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 1 - \omega \\ (1 - 2\omega)^2 = 0 \end{array} \right\} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 1 - \omega \\ 1 - 2\omega = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\varphi, \omega) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow (x, y) = (2, 2). \end{aligned}$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να διαιρέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του

συστήματος $\left\{ \begin{array}{l} \varphi + \omega = 1 \\ \varphi^3 + \omega^3 = \varphi\omega \end{array} \right\}$, οπότε θα προέκυπτε η εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^3 + \omega^3}{\varphi + \omega} = \varphi\omega & \Leftrightarrow \frac{(\varphi + \omega)(\varphi^2 - \varphi\omega + \omega^2)}{\varphi + \omega} = \varphi\omega \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi\omega + \omega^2 = \varphi\omega \\ & \Leftrightarrow (\varphi - \omega)^2 = 0 \Leftrightarrow \varphi = \omega \text{ κλπ.} \end{aligned}$$

2ος τρόπος

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών, για $xy \neq 0$, παίρνουμε:

$$y + x = xy \quad \text{και} \quad y^3 + x^3 = x^2y^2.$$

Έτσι,

$$y^3 + x^3 = xy(y + x) = xy^2 + x^2y,$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$y^2(y-x) + x^2(x-y) = 0 \Leftrightarrow (y-x)^2(y+x) = 0.$$

Αφού $y+x = xy \neq 0$, παίρνουμε $y = x$, και εύκολα από την πρώτη εξίσωση βλέπουμε ότι $x = y = 2$.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB και Γ ένα σημείο στο εσωτερικό του, έτσι ώστε $A\Gamma > AB/2$. Σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία AB θεωρούμε τα σημεία Δ, E έτσι ώστε τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και ABE να είναι ισοσκελή, με $\Delta A = \Delta\Gamma > EA = EB$ και $\Delta A \parallel E\Gamma$. Η παράλληλη από το σημείο Δ προς την ευθεία EA τέμνει την ευθεία $E\Gamma$ στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

(α) $\Gamma\Delta = EZ$ και $\Delta Z = BE$

(β) $BZ \parallel \Delta\Gamma$.

Λύση

(α) Το τετράπλευρο $E\Delta\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Επομένως, έχουμε:

$$\Delta\Gamma = \Delta A = EZ \quad (1).$$

$$EB = EA = \Delta Z \quad (2)$$

(β) Σύμφωνα με το ερώτημα (α), τα τρίγωνα $\Gamma\Delta Z$ και ZEB , έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία. Θα αποδείξουμε ότι έχουν και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, δηλαδή $\widehat{Z\Delta\Gamma} = \widehat{B\hat{E}Z}$. Έχουμε:

$$\widehat{Z\Delta\Gamma} = \widehat{Z\Delta A} - \widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{A\hat{E}Z} - \widehat{\Gamma\Delta A}$$

και

$$\widehat{B\hat{E}Z} = \widehat{B\hat{E}A} - \widehat{Z\hat{E}A}.$$

Επομένως, για να αποδείξουμε ότι

$$\widehat{Z\Delta\Gamma} = \widehat{B\hat{E}Z},$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι :

$$\widehat{B\hat{E}A} + \widehat{\Gamma\Delta A} = 2 \cdot \widehat{Z\hat{E}A} \quad (3)$$

Από τα ισοσκελή $B\hat{E}A$, $\Gamma\Delta A$, παίρνουμε ότι

$$\widehat{B\hat{E}A} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{E\hat{A}B}$$

$$\text{και} \quad \widehat{\Gamma\Delta A} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}.$$

Επομένως

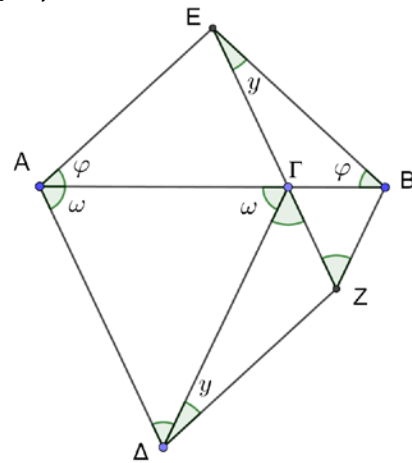
$$\begin{aligned} \widehat{B\hat{E}A} + \widehat{\Gamma\Delta A} &= 2 \cdot (180^\circ - \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} - \widehat{E\hat{A}B}) \\ &= 2 \cdot (180^\circ - \widehat{E\hat{A}\Delta}) = 2 \cdot \widehat{A\hat{\Delta}Z} = 2 \cdot \widehat{Z\hat{E}A}, \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

Επομένως, τα τρίγωνα $\Gamma\Delta Z$ και ZEB είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\widehat{\Delta\Gamma Z} = \widehat{B\hat{Z}E}$, δηλαδή οι ευθείες $\Gamma\Delta$ και BZ τεμνόμενες από την ευθεία ΓZ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες. Άρα είναι $BZ \parallel \Delta\Gamma$.

Πρόβλημα 3

Έστω $n > 2$ ένας περιττός ακέραιος. Έστω k ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από την τετραγωνική ρίζα του $n+2$. Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός $\frac{n}{k}$ είναι ακέραιος, τότε ο n είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.



Σχήμα 1

Λύση

Αφού ο k είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από την τετραγωνική ρίζα του $n + 2$, θα έχουμε ότι $k < \sqrt{n + 2} \leq k + 1$, οπότε

$$k^2 < n + 2 \leq k^2 + 2k + 1.$$

Διαιρώντας με k , παίρνουμε $k < \frac{n}{k} + \frac{2}{k} \leq k + 2 + \frac{1}{k}$, δηλαδή

$$k - \frac{2}{k} < \frac{n}{k} \leq k + 2 - \frac{1}{k}.$$

Αφού ο $\frac{n}{k}$ είναι ακέραιος, από την παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{n}{k} \in \{k, k + 1\}.$$

Όμως, αν $\frac{n}{k} = k + 1$, τότε $n = k(k + 1)$, οπότε ο n διαιρείται από το 2 (αφού κάποιος από τους $k, k + 1$ διαιρείται από το 2). Αυτό είναι άτοπο, αφού από την υπόθεση ο n είναι περιττός ακέραιος. Επομένως, αναγκαστικά έχουμε $\frac{n}{k} = k$, οπότε $n = k^2$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \neq 0, \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{1}{9}, xyz = 27 \right\}.$$

Λύση

Για $xyz \neq 0$, θέτουμε $\frac{1}{x} = \alpha, \frac{1}{y} = \beta, \frac{1}{z} = \gamma$, οπότε το σύστημα γράφεται:

$$\left\{ \alpha + \beta + \gamma \neq 0, \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \frac{1}{9}, \alpha\beta\gamma = \frac{1}{27} \right\}.$$

Από τη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση έχουμε:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \left[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\alpha + \beta + \gamma \neq 0}{\Leftrightarrow} (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 0 &\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\beta - \gamma)^2 = (\gamma - \alpha)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \alpha = 0 &\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma. \end{aligned}$$

Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε:

$$\alpha^3 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}, \text{ οπότε έχουμε: } \alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3} \text{ και τελικά}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 3.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$2(x-1)(y-1) - 2(x-1)\sqrt{y-1} - 2(y-1)\sqrt{x-1} + x + y - 2 \leq 0.$$

Λύση

Η ανίσωση ορίζεται για $x \geq 1$ και $y \geq 1$. Θέτουμε

$$\alpha = \sqrt{x-1} \geq 0 \text{ και } \beta = \sqrt{y-1} \geq 0.,$$

οπότε η δεδομένη σχέση παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \leq 0 \\ & \Leftrightarrow (\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha^2) + (\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta^2 + \beta^2) \leq 0 \\ & \Leftrightarrow \alpha^2(\beta^2 - 2\beta + 1) + \beta^2(\alpha^2 - 2\alpha + 1) \leq 0 \\ & \Leftrightarrow \alpha^2(\beta - 1)^2 + \beta^2(\alpha - 1)^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Αν ήταν κάποιος από τους όρους $\alpha(\beta - 1)$, $\beta(\alpha - 1)$ διάφορος του μηδενός, τότε θα είχαμε $\alpha^2(\beta - 1)^2 + \beta^2(\alpha - 1)^2 > 0$, άτοπο. Άρα η σχέση (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{aligned} & \alpha(\beta - 1) = 0, \beta(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0 \text{ ή } \alpha = \beta = 1 \\ & \sqrt{x-1} = 0 = \sqrt{y-1} \text{ ή } \sqrt{x-1} = 1 = \sqrt{y-1} \\ & x = y = 1 \text{ ή } x = y = 2. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3

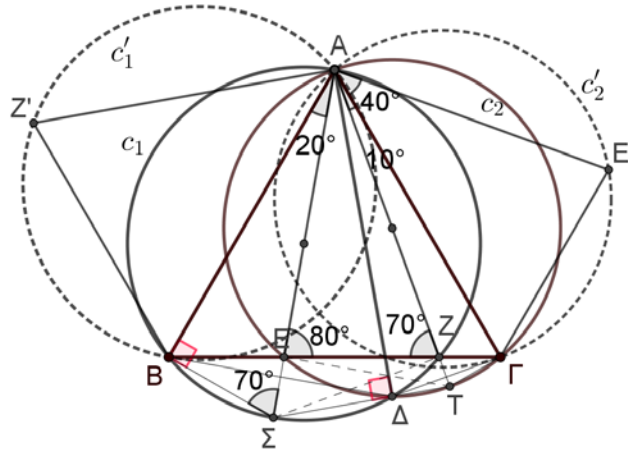
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει στο επίπεδό του μοναδικό σημείο Δ τέτοιο ώστε $\widehat{A\Delta B} = 70^\circ$ και $\widehat{A\Delta \Gamma} = 80^\circ$.

Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{B\Delta A}$.

Λύση

Θεωρούμε (τα μοναδικά) σημεία E και Z στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ τέτοια ώστε $\widehat{BAE} = 20^\circ$ και $\widehat{Z\Gamma A} = 10^\circ$. Τότε είναι $\widehat{A\hat{E}\Gamma} = 80^\circ$ και $\widehat{A\hat{Z}B} = 70^\circ$. Έστω c_1 ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABZ και c_2 ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $A\Gamma E$. Τότε οι κύκλοι c_1 και c_2 τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο Δ διαφορετικό του A , για το οποίο ισχύει:

$$\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\hat{Z}B} = 70^\circ \text{ και } \widehat{A\Delta \Gamma} = \widehat{A\hat{E}\Gamma} = 80^\circ.$$



Σχήμα 2

Επίσης, έστω E' το συμμετρικό του E ως προς την $A\Gamma$ και Z' το συμμετρικό του Z ως προς την AB . Έστω c'_1 ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABZ' και c'_2 ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $A\Gamma E'$. Τότε είναι:

$$\angle AE'\Gamma = 80^\circ \text{ και } \angle AZ'B = 70^\circ$$

Προφανώς το τόξο $AZ'B$ του c'_1 και το τόξο $AE'\Gamma$ του c'_2 , δεν τέμνονται σε σημείο διαφορετικό από το A . Το τόξο $AZ'B$ του c'_1 δεν τέμνει το τόξο $AE'\Gamma$ του c'_2 , αφού το τελευταίο τέμνει την πλευρά AB σε εσωτερικό της σημείο. Επίσης, το τόξο $AE'\Gamma$ του c'_2 , δεν τέμνει το τόξο AZB του c_1 , αφού το τελευταίο τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο. Συνεπώς, το Δ είναι μοναδικό.

Έστω Σ το σημείο τομής της προέκτασης της AE και του c_1 , και έστω T το σημείο τομής της προέκτασης της AZ και του c_2 . Αφού τα σημεία A, B, Σ, Δ, Z είναι ομοκυκλικά και $B\hat{Z}\Sigma = B\hat{A}\Sigma = 20^\circ$ έχουμε

$$A\hat{\Delta}\Sigma = A\hat{Z}\Sigma = A\hat{Z}B + B\hat{Z}\Sigma = 70^\circ + 20^\circ = 90^\circ.$$

Ομοίως, αφού τα σημεία A, E, Δ, T, Γ είναι ομοκυκλικά και $\Gamma\hat{E}T = \Gamma\hat{A}T = 10^\circ$ έχουμε

$$A\hat{\Delta}T = A\hat{E}T = A\hat{E}\Gamma + \Gamma\hat{E}T = 80^\circ + 10^\circ = 90^\circ.$$

Συνεπώς, τα σημεία Σ, Δ, T είναι συνευθειακά

Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $AB\Sigma Z$ και $AET\Gamma$ έχουμε

$$E\hat{T}A = E\hat{\Gamma}A = 60^\circ \text{ και } A\hat{\Sigma}Z = A\hat{B}Z = 60^\circ.$$

Άρα $E\hat{T}Z = 60^\circ = E\hat{\Sigma}Z$, που σημαίνει ότι το τετράπλευρο $EZT\Sigma$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, οπότε $A\hat{\Sigma}\Delta = A\hat{Z}E = 70^\circ$, και άρα $\Sigma\hat{A}\Delta = 20^\circ$ στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Sigma$. Συνεπώς,

$$B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Sigma + \Sigma\hat{A}\Delta = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ.$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω a, b μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a + b = 2$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = 8(a^3 + b^3) - 3(a^4 + b^4).$$

Λύση

Θέτουμε $p = ab$ Τότε έχουμε:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 8 - 6p. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = ((a + b)^2 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 \\ &= (4 - 2p)^2 - 2p^2 = 16 - 16p + 2p^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Επομένως, η δεδομένη παράσταση γίνεται:

$$A = 8(8 - 6p) - 3(16 - 16p + 2p^2) = -6p^2 + 16$$

Επειδή $0 \leq p = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1$, έπεται ότι:

$$0 \leq p^2 \leq 1 \Rightarrow -6 \leq -6p^2 \leq 0 \Rightarrow 10 \leq A = -6p^2 + 16 \leq 16$$

Η ισότητα στο αριστερό μέλος ισχύει όταν $p^2 = 1 \Leftrightarrow ab = 1 \stackrel{a+b=2}{\Leftrightarrow} a = b = 1$.

Η ισότητα στο δεξιό μέλος ισχύει όταν

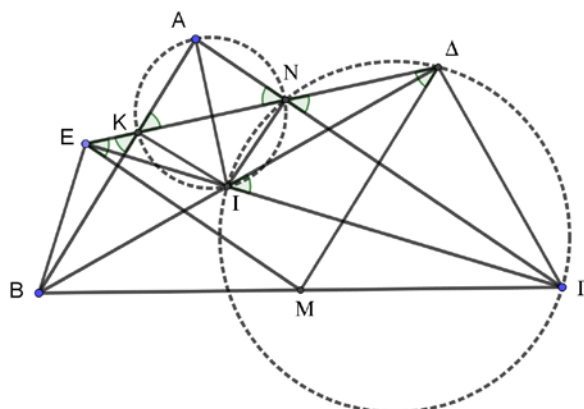
$$p^2 = 0 \Leftrightarrow ab = 0 \stackrel{a+b=2}{\Leftrightarrow} (a, b) = (2, 0) \text{ ή } (a, b) = (0, 2).$$

Επομένως, η ελάχιστη τιμή της παράστασης A είναι 10 και η μέγιστη 16

Πρόβλημα 2

Έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$. Έστω Δ σημείο στη διχοτόμο της γωνίας B τέτοιο ώστε $M\Delta = MB$ και έστω E σημείο στη διχοτόμο της γωνίας Γ τέτοιο ώστε $ME = M\Gamma$. Έστω I το σημείο τομής των διχοτόμων $B\Delta$ και ΓE , έστω K το σημείο τομής των ευθειών AB και $E\Delta$, και έστω N το σημείο τομής των ευθειών $A\Gamma$ και $E\Delta$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, K, I, N είναι ομοκυκλικά.

Λύση



Σχήμα 3

Επειδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και $MB = MD$, έπεται ότι:
 $\hat{M}\hat{A}B = \hat{M}\hat{B}A = \hat{A}\hat{B}A$, οπότε θα είναι $MA \parallel BA$.

Ομοίως, προκύπτει και ότι: $ME \parallel GA$.

Άρα έχουμε:

$$\hat{A}\hat{N}K = \hat{\Delta}\hat{N}G = \hat{\Delta}\hat{E}M \text{ και } \hat{A}\hat{K}N = \hat{E}\hat{K}B = \hat{E}\hat{\Delta}M.$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $EM\Delta$ έχουμε $\hat{\Delta}\hat{E}M = \hat{E}\hat{\Delta}M$, οπότε από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει η ισότητα $\hat{A}\hat{N}K = \hat{A}\hat{K}N$. Άρα το τρίγωνο AKN είναι ισοσκελές με $AK = AN$, οπότε η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ είναι κάθετη προς την πλευρά KN . Επομένως, έχουμε:

$$\hat{\Delta}\hat{N}G = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{I}}{2} = \hat{\Delta}\hat{I}G,$$

αφού η γωνία $\hat{\Delta}\hat{I}G$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο BIG . Επομένως, το τετράπλευρο ΔNIG είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Το τρίγωνο ΔBG είναι ορθογώνιο, αφού $MD = BM = MG = \frac{BG}{2}$, οπότε θα είναι

και $\hat{I}\hat{\Delta}G = 90^\circ$, Άρα είναι και $\hat{I}\hat{N}G = 90^\circ \Rightarrow \hat{I}\hat{N}A = 90^\circ$. Ομοίως προκύπτει ότι $\hat{I}\hat{K}A = 90^\circ$. Επομένως, $\hat{I}\hat{N}A + \hat{I}\hat{K}A = 180^\circ$, οπότε το τετράπλευρο $AKIN$ είναι εγγράψιμο.

Πρόβλημα 3

Η συνάρτηση $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών $f(\mathbb{N}^*) \subseteq \mathbb{N}^*$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(6n+7) = 6f(n) + 7 \quad \text{και} \quad f(7n-1) = 7f(n) - 1,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Να προσδιορίσετε την τιμή $f(2029)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

$$2029 = 6 \cdot 338 + 1 = 6 \cdot 337 + 7$$

$$337 = 6 \cdot 56 + 1 = 6 \cdot 55 + 7$$

$$55 = 6 \cdot 9 + 1 = 6 \cdot 8 + 7$$

και επίσης ότι

$$7n-1 = 6n+7 \Leftrightarrow n=8.$$

Με $n=8$ στις δεδομένες σχέσεις λαμβάνουμε:

$$f(55) = 6f(8) + 7 \quad \text{και} \quad f(55) = 7f(8) - 1,$$

από τις οποίες προκύπτει η ισότητα

$$7f(8) - 1 = 6f(8) + 7,$$

οπότε $f(8) = 8$. Άρα έχουμε:

$$f(55) = 6f(8) + 7 = 6 \cdot 8 + 7 = 55$$

$$f(337) = 6f(55) + 7 = 6 \cdot 55 + 7 = 337$$

$$f(2029) = 6f(337) + 7 = 6 \cdot 337 + 7 = 2029.$$



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
4 Νοεμβρίου 2023

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = \left(\frac{-(-5)^2 + (-3)^2}{(-4)^2} \right)^{2023} + \frac{22}{23} \text{ και } B = -[(3-7)^2 + (-2)^3 - 9]^2 + \frac{23}{24}.$$

Λύση

Υπολογίζουμε τις δύο αριθμητικές παραστάσεις:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{-(-5)^2 + (-3)^2}{(-4)^2} \right)^{2023} + \frac{22}{23} = \left(\frac{-25 + 9}{16} \right)^{2023} + \frac{22}{23} \\ &= (-1)^{2023} + \frac{22}{23} = -1 + \frac{22}{23} = -\frac{1}{23}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= -[(3-7)^2 + (-2)^3 - 9]^2 + \frac{23}{24} = -[(-4)^2 + (-2)^3 - 9]^2 + \frac{23}{24} = \\ &= -(16 - 8 - 9)^2 + \frac{23}{24} = -(-1)^2 + \frac{23}{24} = -1 + \frac{23}{24} = -\frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Επειδή είναι

$$A - B = -\frac{1}{23} - \left(-\frac{1}{24} \right) = -\frac{1}{23} + \frac{1}{24} = -\left(\frac{1}{23} - \frac{1}{24} \right) = -\frac{1}{23 \cdot 24} < 0,$$

έπεται ότι: $A < B$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 18 και x είναι ίσος με 3, όπου x θετικός ακέραιος μικρότερος του 50. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου των αριθμών 18 και x .

Λύση

Επειδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 18 και x είναι το 3, έπεται ότι πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή οι πιθανές τιμές του x , $0 < x < 50$ είναι οι εξής:

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48.$$

Όμως, όταν ο x είναι πολλαπλάσιο του 6 ή πολλαπλάσιο του 9, τότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 18 και x θα είναι μεγαλύτερος του 3, οπότε πρέπει να αποκλείσουμε όλα τα πολλαπλάσια αυτών των δύο αριθμών.

Άρα οι δυνατές τιμές του x είναι οι: 3, 15, 21, 33, 39, για τις οποίες εύκολα επαληθεύουμε ότι $\text{ΜΚΔ}(18, x) = 3$.

Επομένως οι δυνατές τιμές του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου των αριθμών 18 και x είναι $\text{ΕΚΠ}(18, 3) = 18$, $\text{ΕΚΠ}(18, 15) = 90$, $\text{ΕΚΠ}(18, 21) = 126$, $\text{ΕΚΠ}(18, 33) = 198$, και $\text{ΕΚΠ}(18, 39) = 234$.

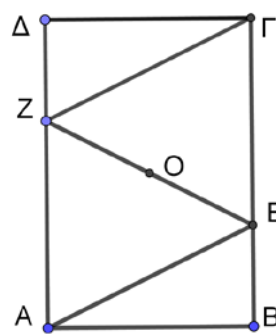
Πρόβλημα 3. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, τα ευθύγραμμα τμήματα AE και ΓZ είναι παράλληλα και το σημείο O είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος EZ . Να αποδείξετε ότι:

(α) $AE = \Gamma Z$.

(β) $BE = \Delta Z$.

(γ) Τα σημεία B , O και Δ βρίσκονται στην ίδια ευθεία και το O είναι το μέσο του τμήματος $B\Delta$.

Σημείωση: Στο φύλλο απαντήσεων να κάνετε το δικό σας σχήμα.



Λύση

(α) Επειδή από την υπόθεση είναι $AE \parallel \Gamma Z$ και $AZ \parallel E\Gamma$ το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

Άρα έχουμε: $AE = \Gamma Z$.

(β) Από το παραλληλόγραμμο $AE\Gamma Z$ προκύπτει ότι:

$$AZ = E\Gamma \quad (1)$$

Επίσης το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, οπότε

$$A\Delta = B\Gamma \quad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη της ισότητας (1) από την ισότητα (2), έχουμε:

$$A\Delta - AZ = B\Gamma - E\Gamma \Rightarrow \Delta Z = BE.$$

(γ) Το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$ είναι κοινή διαγώνιος στα παραλληλόγραμμα $AE\Gamma Z$ και $AB\Gamma\Delta$. Επομένως το μέσο O της διαγωνίου EZ είναι και μέσο της $A\Gamma$ και επίσης από το O περνάει η διαγώνιος $B\Delta$ του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ και επιπλέον αυτό είναι το μέσο της.

Πρόβλημα 4. Η δασκάλα μιας τάξης 20 παιδιών θέλει να επιλέξει τυχαία κάποια από αυτά για να την εκπροσωπήσουν στη Βουλή. Τοποθετεί τα παιδιά σε έναν κύκλο και τους μοιράζει από ένα φάκελο που μέσα γράφει έναν ακέραιο αριθμό από το 1 έως το 20. Κάθε αριθμός εμφανίζεται μόνο μία φορά. Αφού ανοίξουν τους φακέλους, ένα παιδί επιλέγεται μόνο αν έχει δίπλα του (δεξιά και αριστερά του) ένα παιδί με μικρότερο αριθμό και ένα παιδί με μεγαλύτερο αριθμό. Τελικά επιλέχθηκαν 7 παιδιά. Είναι δυνατόν το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα παιδιά που επιλέχθηκαν να είναι 113;

Λύση

Παρατηρούμε ότι το παιδί που έχει το φάκελο με τον αριθμό 20 δεν μπορεί να επιλεγεί, αφού εκατέρωθεν αυτού στον κύκλο έχει παιδιά με μικρότερους αριθμούς. Συνεπώς το μέγιστο το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα 7 παιδιά που επιλέχθηκαν είναι το πολύ

$$19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 = 112.$$

Επομένως δεν υπάρχει καμιά διάταξη των παιδιών ώστε το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα 7 παιδιά που επιλέχθηκαν να είναι 113.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Δίνεται η αριθμητική παράσταση

$$A = \left[\frac{(-2)^{-10}}{(-8)^{-10}} + 3 \cdot \frac{32^6}{4^5} \right]^{100} : (12^2 - 4^2)^{300}$$

Να εκφράσετε την τιμή της παράστασης A ως δύναμη με βάση το 2.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{(-2)^{-10}}{(-8)^{-10}} + 3 \cdot \frac{32^6}{4^5} \right]^{100} : (12^2 - 4^2)^{300} \\ &= \left[\left(\frac{-8}{-2} \right)^{10} + 3 \cdot \frac{(2^5)^6}{(2^2)^5} \right]^{100} : (144 - 16)^{300} \\ &= \left[4^{10} + 3 \cdot \frac{2^{30}}{2^{10}} \right]^{100} : 128^{300} = [(2^2)^{10} + 3 \cdot 2^{20}]^{100} : (2^7)^{300} \\ &= [2^{20} + 3 \cdot 2^{20}]^{100} : (2^7)^{300} = (4 \cdot 2^{20})^{100} : (2^7)^{300} \\ &= (2^2 \cdot 2^{20})^{100} : (2^7)^{300} \\ &= (2^{22})^{100} : (2^7)^{300} = 2^{2200} \cdot 2^{2100} = 2^{100}. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2. Δίνεται ο εξαψήφιος θετικός ακέραιος $A = \overline{2023xy}$, όπου x, y ψηφία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Να προσδιορίσετε τα ψηφία x, y έτσι ώστε ο αριθμός A να διαιρείται με τον αριθμό 17.

Λύση

Έχουμε:

$$A = 2023xy = 202300 + 10x + y = 17 \cdot 11900 + 10x + y,$$

οπότε για να διαιρείται ο αριθμός A με το 17 αρκεί ο αριθμός $\overline{xy} = 10x + y$ να διαιρείται με το 17, δηλαδή αρκεί $\overline{xy} = 10x + y \in \{17, 34, 51, 68, 85\}$.

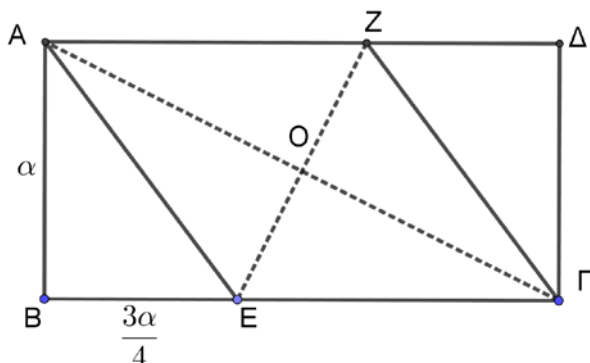
Άρα οι λύσεις είναι τα ζεύγη:

$$(x, y) \in \{(0, 0), (1, 7), (3, 4), (5, 1), (6, 8), (8, 5)\}.$$

Πρόβλημα 3. Δίνονται 7 θετικοί ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους γνωρίζουμε ότι για οποιουδήποτε 4 από αυτούς, το γινόμενο τους διαιρείται με το 10. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός (από τους αρχικούς 7) που διαιρείται με το 10.

Λύση. Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν 4 περιττοί αριθμοί, γιατί τότε το 10 δεν θα διαιρούσε το γινόμενό τους. Επομένως οι περιττοί αριθμοί είναι το πολύ τρεις. Άρα οι άρτιοι είναι τουλάχιστον τέσσερις. Ομοίως, δεν να υπάρχουν 4 αριθμοί που να μην διαιρούνται με το 5, γιατί τότε το γινόμενό τους δεν διαιρείται με το 10. Συνεπώς υπάρχουν το πολύ 3 αριθμοί που δεν διαιρούνται με το 5, άρα τα πολλαπλάσια του 2 είναι τουλάχιστον 4. Τελικά εφόσον υπάρχουν 7 αριθμοί, υπάρχει κάποιος που είναι πολλαπλάσιο και του 2 και του 5, άρα πολλαπλάσιο του 10.

Πρόβλημα 4.



Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο με $AB = \alpha$, $B\Gamma = 2\alpha$. Οι ευθείες AE και ΓZ είναι παράλληλες και $BE = \frac{3\alpha}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) $AE = AZ$.
- (β) Η διαγώνιος BΔ του ορθογωνίου ABΓΔ περνάει από το O που είναι το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων AΓ και ZE.
- (γ) $A\Gamma = 2 \cdot EZ$.

Σημείωση: Στο φύλλο απαντήσεων να κάνετε το δικό σας σχήμα.

Λύση

(α) Επειδή ABΓΔ ορθογώνιο έπεται ότι $B\Gamma \parallel A\Delta$, οπότε θα είναι και $E\Gamma \parallel AZ$. Επίσης, από την υπόθεση έχουμε ότι $AE \parallel \Gamma Z$. Επομένως το τετράπλευρο AΕΓZ είναι παραλληλόγραμμο.

Από την υπόθεση έχουμε:

$$E\Gamma = 2\alpha - \frac{3\alpha}{4} = \frac{5\alpha}{4}. \quad (1)$$

Επίσης, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABE προκύπτει:

$$AE^2 = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{9\alpha^2}{16}} = \sqrt{\frac{25\alpha^2}{16}} \Rightarrow AE = \frac{5\alpha}{4}. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $AE = E\Gamma$, οπότε το παραλληλόγραμμο AΕΓZ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και άρα είναι ρόμβος.

(β) Το ορθογώνιο ABΓΔ και το παραλληλόγραμμο AΕΓZ έχουν κοινή τη διαγώνιο AΓ. Επομένως η άλλη διαγώνιος εκάστου από αυτά θα περνάει από το μέσο της AΓ.

(γ) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = \sqrt{AB^2 + B\Gamma^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2} \Rightarrow A\Gamma = \alpha\sqrt{5}. \quad (3)$$

Για το εμβαδό του ρόμβου έχουμε:

$$E_{AEFZ} = \frac{1}{2} \cdot AG \cdot EZ = AB \cdot EG \Rightarrow \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} \cdot EZ = \alpha \cdot \frac{5\alpha}{4} \Rightarrow EZ = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}. \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε: $AG = 2 \cdot EZ$

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ έχουν γινόμενο

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1$$

Συνεπώς, είτε και οι τρεις θα είναι ίσοι με 1 είτε ένας εξ αυτών θα ισούται με 1 και οι άλλοι δύο με -1 .

(1ος τρόπος) Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a = b = c$, οπότε

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3a \cdot \frac{3}{a} = 9.$$

Στη δεύτερη περίπτωση, λόγω κυκλικής συμμετρίας, ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$\frac{a}{b} = 1, \quad \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = -1 \Rightarrow a = b = -c \Rightarrow b + c = 0 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0,$$

οπότε

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

(2ος τρόπος) Ισχύει ότι

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \left(1 + \frac{a}{b} \right) \left(1 + \frac{b}{c} \right) \left(1 + \frac{c}{a} \right) + 1$$

Έτσι, αν και οι τρεις αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ είναι ίσοι με 1, τότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με $2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 = 9$, ενώ αν ένας εξ αυτών ισούται με 1 και οι άλλοι δύο με -1 , τότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με $0 + 1 = 1$.

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ είναι το 9 και το 1.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y , με $y \neq -2$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$x^2 - 4x + \frac{5}{y+2} = 2 \quad \text{και} \quad 3(x-2)^2 - \frac{4}{y+2} = -1.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\alpha = (x - 2)^2 \text{ και } \beta = \frac{1}{y + 2}$$

προκύπτει το σύστημα:

$$\{\alpha + 5\beta = 6, \quad 3\alpha - 4\beta = -1\} \Leftrightarrow \alpha = 1, \beta = 1.$$

Άρα έχουμε:

$$\alpha = (x - 2)^2 = 1 \text{ και } \beta = \frac{1}{y + 2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 1, y = -1$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (1, -1) \text{ ή } (x, y) = (3, -1).$$

Πρόβλημα 3. Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε ο αριθμός

$$A = 2023 \cdot 10^n + 1,$$

να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Λύση. (1ος τρόπος). Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.

Έστω $A = 2023 \cdot 10^n + 1 = x^2$, για κάποιο ακέραιο x . Το άθροισμα των ψηφίων του A είναι ίσο με 8, οπότε ο A δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, άρα ούτε και ο x . Τότε

$$A - 1 = 2023 \cdot 10^n = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

με $x - 1$ ή $x + 1$ πολλαπλάσιο του 3, άτοπο, αφού το άθροισμα των ψηφίων του $A - 1$ είναι ίσο με 7.

(2ος τρόπος) Θεωρώντας τις περιπτώσεις $x = 3k, x = 3k + 1, x = 3k + 2$, με k ακέραιο, βλέπουμε ότι το τετράγωνο x^2 ενός ακέραιου αριθμού x αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 κατά τη διαίρεση του με το 3. Αφού

$$A = 2022999 \dots 9 + 2 = \text{πολ. } 3 + 2$$

όπου το 9 εμφανίζεται n φορές, ο A δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 4. Σε ένα κύκλο $c(O, R)$ θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ και Δ τέτοια ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB \parallel \Delta\Gamma$. Έστω E το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας A του τραπέζιου με τον κύκλο $c(O, R)$. Αν η παράλληλη από το E στην $\Delta\Gamma$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο Z , να δειχθεί ότι η ευθεία OZ είναι κάθετη στην $E\Gamma$.

Λύση

Δίνεται ότι η ΑΕ διχοτομεί τη γωνία

$\hat{A}$, και $EZ \parallel \Delta\Gamma$, ενώ γνωρίζουμε ότι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες. Έτσι, έχουμε

$$Z\hat{E}\Gamma = E\hat{\Gamma}\Delta = \Delta\hat{A}E = \frac{\hat{A}}{2}.$$

Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $\hat{A} = \hat{B}$, και αφού $EZ \parallel \Delta\Gamma$ είναι

$$E\hat{Z}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}B = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - \hat{A}.$$

Άρα στο τρίγωνο $EZ\Gamma$ είναι

$$E\hat{\Gamma}Z = 180^\circ - E\hat{Z}\Gamma - Z\hat{E}\Gamma = 180^\circ - (180^\circ - \hat{A}) - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} = Z\hat{E}\Gamma.$$

Επομένως, το τρίγωνο $EZ\Gamma$ είναι ισοσκελές με $EZ = \Gamma Z$. Αφού $OE = OG$, τα σημεία O και Z ορίζουν την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος EG . Συνεπώς, η ευθεία OZ είναι κάθετη στην EG .

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c, d έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right).$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ έχουν γινόμενο

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a} = 1.$$

Συνεπώς, όλοι τους είναι ίσοι με 1 ή δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1 ή όλοι τους είναι ίσοι με -1 .

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a = b = c = d$, οπότε

$$(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) = 4a \cdot \frac{4}{a} = 16.$$

Στη δεύτερη περίπτωση όπου δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1 , αν

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = -1 \text{ ή } \frac{b}{c} = \frac{d}{a} = -1,$$

τότε $a + b + c + d = 0$, οπότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0.

Σε κάθε άλλη υποπερίπτωση, π.χ. αν

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = -1 \text{ και } \frac{c}{d} = \frac{d}{a} = 1$$

παίρνουμε

$$(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) = 2a \cdot \frac{2}{a} = 4.$$

Στην τρίτη περίπτωση όπου

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a} = -1,$$

παίρνουμε $a + b = b + c = c + d = d + a = 0$, οπότε $a = c$ και $b = d$ και η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0, αφού $a + b + c + d = 0$.

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$ είναι το 16, το 4 και το 0.

Πρόβλημα 2. Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε κάποιος από τους αριθμούς

$$A = 2023 \cdot 10^n + 6,$$

να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος θετικός ακέραιος. Έστω ότι

$$A = 2023 \cdot 10^n + 6 = x^2, \text{ για κάποιο ακέραιο } x.$$

(1ος τρόπος) Αφού ο A είναι άρτιος, θα είναι $x = 2y$ για κάποιο ακέραιο y , οπότε θα έχουμε

$$2023 \cdot 10^n + 6 = 4y^2$$

ή ισοδύναμα, αφού διαιρέσουμε με το 2,

$$10115 \cdot 10^{n-1} + 3 = 2y^2$$

Εάν $n = 1$, η τελευταία σχέση δίνει $y^2 = 5059$, ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο ($71^2 < 5059 < 72^2$).

Εάν $n > 1$, το αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης είναι περιττός αριθμός, ενώ το δεξί είναι άρτιος, άτοπο. Συνεπώς, ο A δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

(2ος τρόπος) Αν $n = 1$, τότε $A = 20236 = 4 \cdot 5059$, ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο ($71^2 < 5059 < 72^2$).

Εάν $n > 1$, τότε ο αριθμός $A - 2 = 2023 \cdot 10^n + 4$ διαιρείται με το 4. Θεωρώντας τις περιπτώσεις $x = 4k + v$, με k ακέραιο και $0 \leq v \leq 3$ βλέπουμε ότι το τετράγωνο του ακεραίου αριθμού x αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 κατά τη διαίρεση του με το 4. Συνεπώς, ο A δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

(3ος τρόπος) Αφού το 2023 είναι πολλαπλάσιο του 7, βλέπουμε ότι ο Α αφήνει υπόλοιπο 6 κατά τη διαίρεσή του με το 7.

Θεωρώντας τις περιπτώσεις $x = 7k + v$, με k ακέραιο και $0 \leq v \leq 6$, βλέπουμε ότι το τετράγωνο του ακέραιου αριθμού x αφήνει υπόλοιπο 0, 1, 2 ή 4 κατά τη διαίρεσή του με το 7. Συνεπώς, ο Α δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 3. Δίνονται τα τριώνυμα $P(x) = x^2 + ax + \beta$ και $Q(x) = x^2 + \gamma x + \delta$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ακέραιους, τέτοια ώστε $P(1) = Q(2022)$ και $P(2022) = Q(1)$. Να δειχθεί ότι το άθροισμα $\alpha + \gamma$ και η διαφορά $\beta - \delta$ είναι πολλαπλάσια του 2023.

Λύση. (1ος τρόπος) Αφού $P(2022) = Q(1)$ παίρνουμε

$$2022^2 + 2022\alpha + \beta = 1 + \gamma + \delta,$$

οπότε

$$\gamma + \delta + \alpha - \beta = 2023\alpha + 2022^2 - 1 = 2023(\alpha + 2021).$$

και αφού $Q(2022) = P(1)$ παίρνουμε $2022^2 + 2022\gamma + \delta = 1 + \alpha + \beta$, οπότε

$$\alpha + \beta + \gamma - \delta = 2023\gamma + 2022^2 - 1 = 2023(\gamma + 2021).$$

Με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε $2(\beta - \delta) = 2023(\gamma - \alpha)$, οπότε

$$\beta - \delta = \frac{2023(\gamma - \alpha)}{2}.$$

Αφού το 2023 είναι περιττός αριθμός και η διαφορά $\beta - \delta$ είναι ακέραιος, θα πρέπει η διαφορά $\gamma - \alpha$ να είναι άρτιος. Συνεπώς η διαφορά $\beta - \delta$ είναι πολλαπλάσιο του 2023, και το άθροισμα

$$\alpha + \gamma = 2023(\gamma + 2021) - (\beta - \delta)$$

είναι πολλαπλάσιο του 2023.

(2ος τρόπος)

Αφού $P(1) = Q(2022)$ και $P(2022) = Q(1)$, η εξίσωση

$$Q(x) = P(2023 - x),$$

έχει λύσεις $x = 1$ και $x = 2022$. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$x^2 + \gamma x + \delta = (2023 - x)^2 + \alpha(2023 - x) + \beta,$$

ή, κάνοντας τις πράξεις, ισοδύναμα

$$(\alpha + \gamma + 4046)x = 2023\alpha + \beta - \delta + 2023^2.$$

Αν $\alpha + \gamma + 4046 \neq 0$, τότε η τελευταία εξίσωση έχει μοναδική λύση ως προς x , άτοπο. Άρα

$$\alpha + \gamma + 4046 = 0 \quad \text{και} \quad 2023\alpha + \beta - \delta + 2023^2 = 0.$$

Συνεπώς,

$$\alpha + \gamma = -4046 \quad \text{και} \quad \beta - \delta = -2023\alpha - 2023^2,$$

δηλ. πολλαπλάσια του 2023.

Πρόβλημα 4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG < BG$ και το σημείο τομής των διχοτόμων του Ι. Έστω ότι η ευθεία ΑΙ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ.

Θεωρούμε σημείο K στην πλευρά AB τέτοιο ώστε $BK = BD$, και σημείο Λ στην πλευρά AG τέτοιο ώστε $AL = AK$. Αν M είναι το σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου KIL με την AL (διαφορετικό από το Λ), να αποδείξετε ότι η ευθεία MI είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

Λύση

Τα τρίγωνα KBI και ΔBI είναι ίσα από ΠΓΠ (BI κοινή, $BK = BD$, $\angle KBI = \angle DBI$), οπότε

$$\widehat{IKB} = \widehat{IDB} = \widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2},$$

ως εξωτερική στο τρίγωνο $AD\Gamma$.

Έτσι στο τετράπλευρο $KIDB$ είναι

$$\widehat{KID} = 360^\circ - \widehat{B} - 2\left(\widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2}\right) = 360^\circ - \widehat{B} - 2\widehat{\Gamma} - \widehat{A} = 180^\circ - \widehat{\Gamma}.$$

Τα τρίγωνα AKI και ALI είναι ίσα από ΠΓΠ (AI κοινή, $AK = AL$, $\angle KAI = \angle LAI$), οπότε

$$\widehat{LIA} = \widehat{KIA} = 180^\circ - \widehat{KID} = \widehat{\Gamma}.$$

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $KILM$ παίρνουμε

$$\widehat{AMK} = \widehat{KIL} = 2 \cdot \widehat{LIA} = 2 \cdot \widehat{\Gamma}.$$

Από αυτό στο σημείο μπορούμε να συνεχίσουμε με δύο τρόπους:

(1ος τρόπος) Παρατηρούμε ότι $AI \perp KL$, οπότε $\widehat{MLK} = 90^\circ - \widehat{A}/2$, και

$$\widehat{MIL} = \widehat{MKL} = \widehat{AMK} - \widehat{MLK} = 2 \cdot \widehat{\Gamma} - (90^\circ - \widehat{A}/2).$$

Έστω Z το σημείο τομής της MI με την $B\Gamma$. Τότε έχουμε

$$\widehat{ZID} = \widehat{AIM} = \widehat{AIL} - \widehat{MIL} = \widehat{\Gamma} - (2 \cdot \widehat{\Gamma} - (90^\circ - \widehat{A}/2)) = 90^\circ - \widehat{A}/2 - \widehat{\Gamma}.$$

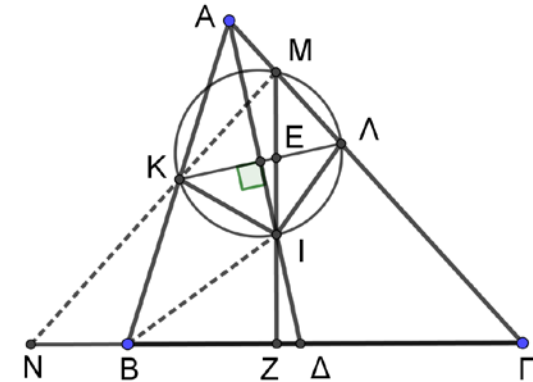
Έτσι

$$\widehat{ZID} + \widehat{IDZ} = \left(90^\circ - \widehat{A}/2 - \widehat{\Gamma}\right) + \left(\widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2}\right) = 90^\circ$$

και άρα $\widehat{IZD} = 90^\circ$, όπως θέλαμε.

(2ος τρόπος) Έχουμε

$$\widehat{MKI} = 180^\circ - \widehat{MLI} = 180^\circ - \widehat{ALI} = \widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{IKB},$$



δηλαδή, το I είναι παράκεντρο του τριγώνου AKM, και άρα η MI είναι η

διχοτόμος της γωνίας K $\hat{M}$ Γ. Έτσι, αν N είναι το σημείο τομής της ευθείας MK με την ευθεία ΓB, σχηματίζεται το ισοσκελές τρίγωνο NMΓ με

$$\hat{N} = \widehat{AMN} - \widehat{M\Gamma N} = \widehat{AMK} - \hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}.$$

Αφού η MI διχοτομεί τη γωνία N $\hat{M}$ Γ του ισοσκελούς τριγώνου NMΓ, είναι κάθετη στην BΓ.

Σχόλιο. Ένας άλλος τρόπος για τη σχέση K $\hat{I}$ A = $\hat{\Gamma}$ είναι ο εξής:
Στο ισοσκελές τρίγωνο KBΔ, βρίσκουμε

$$BK\Delta = B\Delta K = 90^\circ - \widehat{B}/2 = \widehat{A}/2 + \hat{\Gamma}/2.$$

Επειδή B $\hat{\Delta}$ I = $\widehat{A}/2 + \hat{\Gamma}$, έχουμε ότι I $\hat{\Delta}$ K = I $\hat{K}$ Δ = $\hat{\Gamma}/2$. Άρα K $\hat{I}$ A = $\hat{\Gamma}$.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c, d έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \right).$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ έχουν γινόμενο

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a} = 1.$$

Συνεπώς, όλοι τους είναι ίσοι με 1 ή δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1 ή όλοι τους είναι ίσοι με -1.

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a = b = c = d$, οπότε

$$(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} + \frac{1}{e} \right) = 16$$

Στη δεύτερη περίπτωση όπου δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1, αν

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = -1 \text{ ή } \frac{b}{c} = \frac{d}{a} = -1,$$

τότε $a = -b$ και $c = -d$ ή $c = -b$ και $d = -a$ οπότε

$$a^3 + b^3 = 0 \text{ και } c^3 + d^3 = 0 \text{ ή } b^3 + c^3 = 0 \text{ και } a^3 + d^3 = 0$$

Επομένως έχουμε $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$, οπότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0.

Σε κάθε άλλη υποπερίπτωση, π.χ. αν

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = -1 \text{ και } \frac{c}{d} = \frac{d}{a} = 1$$

παίρνουμε

$$a^3 + b^3 = 0 = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \text{ και } c = d,$$

οπότε

$$(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \right) = 2c^3 \cdot \frac{2}{c^3} = 4.$$

Στην τρίτη περίπτωση όπου

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a} = -1,$$

παίρνουμε $a + b = b + c = c + d = d + a = 0$, οπότε $a = c$ και $b = d$ και

$a^3 + b^3 = 0$ από τις οποίες προκύπτουν οι ισότητες $a^3 = c^3$ και $b^3 = d^3$, οπότε

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 2 \cdot (a^3 + b^3) = 0$$

και η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0.

Άρα, οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} + \frac{1}{e} \right)$ είναι το 16, το 4 και το 0.

Πρόβλημα 2. Ένα πολυώνυμο είναι βαθμού 2024 και έχει ακριβώς 4 διακεκριμένες πραγματικές ρίζες. Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος μηδενικών συντελεστών που μπορεί να έχει;

Λύση

Αν έχει μόνον έναν μη μηδενικό συντελεστή, τότε το πολυώνυμο είναι της μορφής $P(x) = ax^{2024}$, $a \neq 0$, το οποίο τη μόνο τη ρίζα $x = 0$ με πολλαπλότητα 2024. Αν έχει μόνο δύο μη μηδενικούς συντελεστές, τότε το πολυώνυμο είναι είτε της μορφής $P(x) = x^{2024} - c$, το οποίο έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες, είτε της μορφής $P(x) = x^{2024} - cx^k = x^k(x^{2024-k} - c)$, το οποίο έχει μια ρίζα το 0 και το πολύ δύο ακόμη από το $x^{2024-k} - c$. Επομένως, το πολυώνυμο δεν μπορεί να έχει 2023 μηδενικούς συντελεστές. Αν έχει 2022 μηδενικούς συντελεστές, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο με 4 διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ρίζες. Πράγματι, το πολυώνυμο

$$Q(x) = (x^{1012} - 1)(x^{1012} - 2) = x^{2024} - 3x^{1012} + 2,$$

έχει 4 διακεκριμένες πραγματικές ρίζες και έχει 2022 μηδενικούς συντελεστές. Προφανώς το πολυώνυμο $Q(x)$ δεν είναι μοναδικό. Άρα το μέγιστο πλήθος μηδενικών συντελεστών που μπορεί να έχει το δεδομένο πολυώνυμο είναι 2022.

Πρόβλημα 3. Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε ο αριθμός

$$A = 2023 \cdot 10^n + 5,$$

να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.

Έστω $A = 2023 \cdot 10^n + 5 = x^2$ για κάποιο ακέραιο x . Αφού ο αριθμός A λήγει σε 5, είναι περιττός και πολλαπλάσιο του 5. Αναγκαστικά, λοιπόν, και ο αριθμός x θα είναι περιττός και μάλιστα θα λήγει σε 5, δηλ. θα είναι πολλαπλάσιο του 5. Διαφορετικά, αν ο x λήγει σε 1, 3, 7 ή 9, το τετράγωνο του θα λήγει σε 1, 9, 9, ή 1, αντίστοιχα. Σε καμιά περίπτωση, δηλαδή, δε λήγει σε 5, άτοπο.

(1ος τρόπος) Έστω $x = 10y + 5$ για κάποιο θετικό ακέραιο y . Τότε

$$x^2 = (10y + 5)^2 = 100y^2 + 100y + 25.$$

Επομένως, ο αριθμός x^2 λήγει σε 25, ενώ ο αριθμός A λήγει σε 35 (αν $n = 1$) ή 05 (αν $n > 1$). Συνεπώς, ο A δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

(2ος τρόπος) Έστω $x = 5y$ για κάποιο ακέραιο y . Τότε θα έχουμε

$$2023 \cdot 10^n + 5 = 25y^2,$$

ή ισοδύναμα, αφού διαιρέσουμε με το 5,

$$4046 \cdot 10^{n-1} + 1 = 5y^2.$$

Εάν $n = 1$, η τελευταία σχέση δίνει $5y^2 = 4047$, ο οποίος δεν είναι πολλαπλάσιο του 5.

Εάν $n > 1$, το αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης είναι ίσο με (ένα πολ/σιο του 5) + 1, ενώ το δεξί είναι πολλαπλάσιο του 5, άτοπο. Συνεπώς, ο A δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 4. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < B\Gamma < A\Gamma$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Αν I είναι το έγκεντρο του $AB\Gamma$, O είναι το περίκεντρό του, και E είναι το μέσο του τόξου AB του περιγεγραμμένου κύκλου του $AB\Gamma$ που δεν περιέχει το Γ , να αποδείξετε ότι η ευθεία OI είναι κάθετη στη χορδή BE .

Λύση.

Αφού η ΓΙ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Gamma}$ και το Ε είναι το μέσο του τόξου ΒΑ, παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε, Ι και Γ είναι συνευθειακά. Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{B\hat{I}\Gamma} = 180^\circ - \widehat{I\hat{B}\Gamma} - \widehat{I\hat{\Gamma}B} =$$

$$180^\circ - \widehat{B}/2 - \widehat{\Gamma}/2 = 90^\circ + \widehat{A}/2 = 120^\circ.$$

Αφού μια επίκεντρη γωνία κύκλου είναι διπλάσια από κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο του κύκλου έχουμε

$$\widehat{B\hat{O}\Gamma} = 2\widehat{A} = 120^\circ = \widehat{B\hat{I}\Gamma}.$$

Άρα ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΙΓ περνάει από το σημείο Ο. οπότε

$$\widehat{I\hat{O}B} = \widehat{I\hat{\Gamma}B} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}.$$

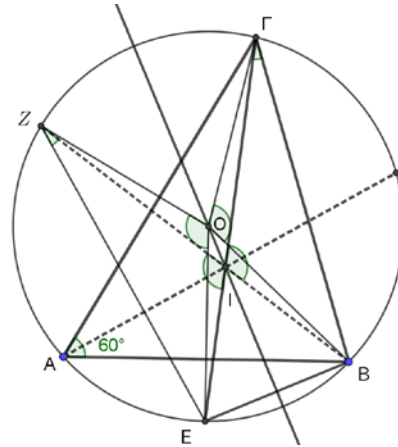
Έστω Ζ το σημείο τομής της ΒΙ με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε το τετράπλευρο ΕΙΟΖ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αφού το τόξο ΕΑΖ έχει μέτρο 120° , οπότε

$$\widehat{E\hat{I}Z} = \widehat{B\hat{I}\Gamma} = 120^\circ = \widehat{E\hat{O}Z}.$$

Άρα έχουμε

$$\widehat{E\hat{O}I} = \widehat{E\hat{Z}I} = \widehat{E\hat{Z}E} = \widehat{E\hat{\Gamma}B} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \widehat{I\hat{O}B},$$

οπότε στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΕΒ με ΟΕ = ΟΒ η ευθεία ΟΙ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{E\hat{O}B}$ και συνεπώς θα είναι και ευθεία του ύψους από την κορυφή Ο, δηλαδή η ευθεία ΟΙ είναι κάθετη στη χορδή ΒΕ.





ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
85ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
8 Νοεμβρίου 2024

Οι λύσεις των προβλημάτων

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = -\left(\frac{(-10)^2 - (-8)^2}{-(-6)^2}\right)^{2024} + \frac{10}{11} \quad \text{και} \quad B = -[(3-8)^2 + (-3)^3 + 1]^{2000} + \frac{30}{31},$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= -\left(\frac{(-10)^2 - (-8)^2}{-(-6)^2}\right)^{2024} + \frac{10}{11} = -\left(\frac{100 - 64}{-36}\right)^{2024} + \frac{10}{11} = -(-1)^{2024} + \frac{10}{11} \\ &= -1 + \frac{10}{11} = -\frac{1}{11}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= -[(3-8)^2 + (-3)^3 + 3]^{2000} + \frac{30}{31} = -[(-5)^2 + (-3)^3 + 1]^{2000} + \frac{30}{31} \\ &= -[25 + (-27) + 1]^{2000} + \frac{30}{31} = -(-1)^{2000} + \frac{30}{31} = -1 + \frac{30}{31} = -\frac{1}{31}. \end{aligned}$$

Επειδή

$$A - B = -\frac{1}{11} - \left(-\frac{1}{31}\right) = -\frac{1}{11} + \frac{1}{31} = -\frac{20}{11 \cdot 31} < 0 \Rightarrow A < B.$$

Πρόβλημα 2

Έστω θετικός ακέραιος α τέτοιος ώστε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 24 και α να είναι ίσο με 120. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του μέγιστου κοινού διαιρέτη των αριθμών 24 και α .

Λύση

Οι δυνατές τιμές του α είναι όλοι οι θετικοί ακέραιοι που είναι διαιρέτες του 120, αλλά όχι του 24, δηλαδή

$$\alpha \in \{5, 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120\}.$$

Έχουμε $\text{MKΔ}(24, 5) = 1$, $\text{MKΔ}(24, 10) = 2$, $\text{MKΔ}(24, 15) = 3$, $\text{MKΔ}(24, 20) = 4$, $\text{MKΔ}(24, 30) = 6$,
 $\text{MKΔ}(24, 40) = 8$, $\text{MKΔ}(24, 60) = 12$, $\text{MKΔ}(24, 120) = 24$.

Άρα οι δυνατές τιμές του μέγιστου κοινού διαιρέτη των αριθμών 24 και α είναι οι:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.$$

Πρόβλημα 3

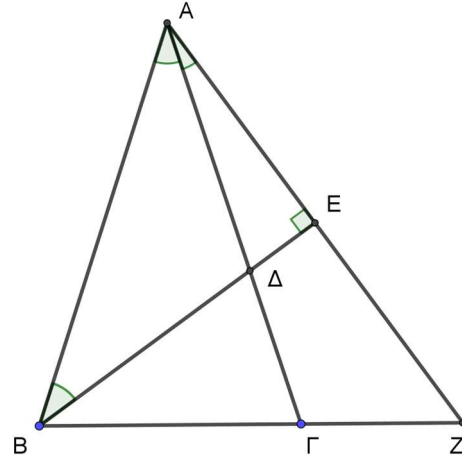
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$. Το σημείο Δ ανήκει στην πλευρά $A\Gamma$ έτσι ώστε το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ να είναι ισοσκελές με $B\Gamma = B\Delta$. Το σημείο Z ανήκει στην ευθεία $B\Gamma$, έτσι ώστε η ευθεία AZ να είναι κάθετη προς την ευθεία $B\Delta$ στο σημείο E .

Δίνεται επίσης ότι: $\widehat{B\Delta\Delta} = \widehat{A\Delta\Delta}$.

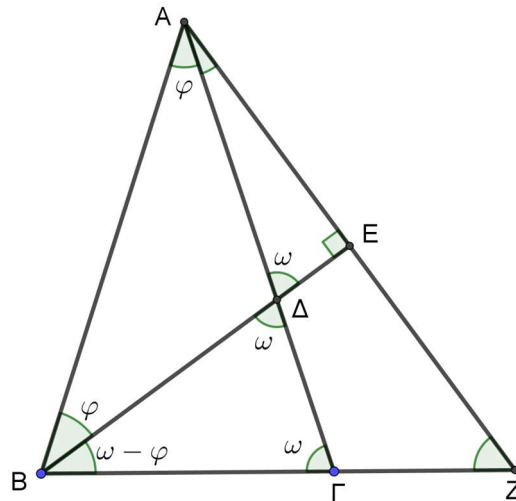
(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $\widehat{B\Delta\Gamma} = 2 \cdot \widehat{A\Delta E}$.

(γ) Να αποδείξετε ότι: $A\Gamma = BZ$.



Λύση



(α) Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \omega \text{ και } \widehat{A} = \varphi = 180^\circ - 2\omega \quad (1)$$

Για το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ έχουμε:

$$\widehat{\Gamma} = \widehat{B\Delta\Gamma} = \omega \text{ και } \widehat{\Gamma\Delta\Delta} = 180^\circ - 2\omega \quad (2)$$

Επειδή $\widehat{B\Delta\Delta} = \widehat{A\Delta\Delta}$ έπεται ότι: $\widehat{A\Delta\Delta} = \varphi$ οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\widehat{B} &= \widehat{AB\Delta} + \widehat{GB\Delta} \Leftrightarrow \omega = \varphi + 180^\circ - 2\omega \Leftrightarrow 3\omega = \varphi + 180^\circ \\ \Leftrightarrow 3\omega &= 180^\circ - 2\omega + 180^\circ \Leftrightarrow 5\omega = 360^\circ \Leftrightarrow \omega = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\widehat{A} = \varphi = 180^\circ - 2\omega = 180^\circ - 2 \cdot 72^\circ = 36^\circ.$$

(β) Επειδή $\widehat{ADE} = \widehat{B\Gamma}$, ως κατά κορυφή, έπεται ότι:

$$\widehat{ADE} = \widehat{B\Gamma} = \omega = 72^\circ,$$

οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ADE έχουμε:

$$\widehat{DAE} = 90^\circ - \widehat{ADE} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ.$$

Επειδή $\widehat{B\Gamma} = 36^\circ$, έπεται ότι: $\widehat{B\Gamma} = 2 \cdot \widehat{DAE}$.

(γ) Επειδή $AB = AG$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $AB = BZ$, δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$\widehat{BAZ} = \widehat{BZA}$, που ισχύει γιατί

$$\widehat{BAZ} = \widehat{A} + \widehat{DAE} = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ$$

και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ έχουμε

$$\widehat{BZA} = 90^\circ - \widehat{GB\Delta} = 90^\circ - (180^\circ - 2\omega) = 2\omega - 90^\circ = 54^\circ.$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left(\left(-\frac{99}{9} \right)^2 + \frac{(-3)^5}{9^2} \right) \cdot (-2024)^0 - 118 - \frac{2}{21},$$

$$B = \frac{(-20)^8}{4^8} - \left(-\frac{1}{5} \right)^{-8} - \frac{3}{32}.$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \left(\left(-\frac{99}{9} \right)^2 + \frac{(-3)^5}{9^2} \right) \cdot (-2024)^0 - 118 - \frac{2}{21} \\ &= \left((-11)^2 + \frac{-3^5}{9^2} \right) \cdot 1 - 118 - \frac{2}{21} = \left((-11)^2 - \frac{3^4 \cdot 3}{9^2} \right) \cdot 1 - 118 - \frac{2}{21} \\ &= (121 - 3) \cdot 1 - 118 - \frac{2}{21} = -\frac{2}{21}. \end{aligned}$$

$$B = \frac{(-20)^8}{4^8} - \left(-\frac{1}{5} \right)^{-8} - \frac{3}{32} = \left(\frac{-20}{4} \right)^8 - (-5)^8 - \frac{3}{32} = 5^8 - 5^8 - \frac{3}{32} = -\frac{3}{32}.$$

Θεωρούμε τη διαφορά A - B:

$$A - B = -\frac{2}{21} - \left(-\frac{3}{32} \right) = \frac{3}{32} - \frac{2}{21} = \frac{63 - 64}{672} = -\frac{1}{672} < 0 \Rightarrow A < B.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $\overline{a\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$ που είναι εικοσαπλάσιοι του αθροίσματος των ψηφίων τους.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει να είναι $0 < \alpha \leq 9$ και ισχύει η εξίσωση

$$\overline{a\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma = 20(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\Leftrightarrow 80\alpha - 10\beta = 19\gamma$$

$$\Leftrightarrow 10(8\alpha - \beta) = 19\gamma.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι ο ακέραιος 19γ είναι πολλαπλάσιο του 10, οπότε η μόνη δυνατή τιμή για το ψηφίο γ είναι η τιμή $\gamma = 0$. Τότε θα είναι $8\alpha - \beta = 0$, από την οποία προκύπτει ότι $\beta = 8\alpha$, οπότε $\alpha = 1$ και $\beta = 8$, αφού $0 < \beta \leq 9$. Άρα $\overline{a\beta\gamma} = 180$.

(2ος τρόπος)

Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι πολλαπλάσια του 20, οπότε λήγουν σε 0. Το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα των ψηφίων ενός τέτοιου αριθμού είναι $9+8=17$, για τον 980, οπότε οποιοσδήποτε υποψήφιος αριθμός μεγαλύτερος του 340 απορρίπτεται, αφού όταν

διαιρεθεί με το 20 δίνει πηλίκο μεγαλύτερο του $340/20=17$. Οι ζητούμενοι αριθμοί, λοιπόν, είναι ανάμεσα στους παρακάτω δεκατρείς αριθμούς:

100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, 260, 280, 300, 320, 340.

Το μικρότερο δυνατό άθροισμα των ψηφίων ενός τέτοιου αριθμού είναι μεγαλύτερο από $100/20=5$. Οπότε απομένουν οι εξής έξι αριθμοί:

160, 180, 240, 260, 280 και 340.

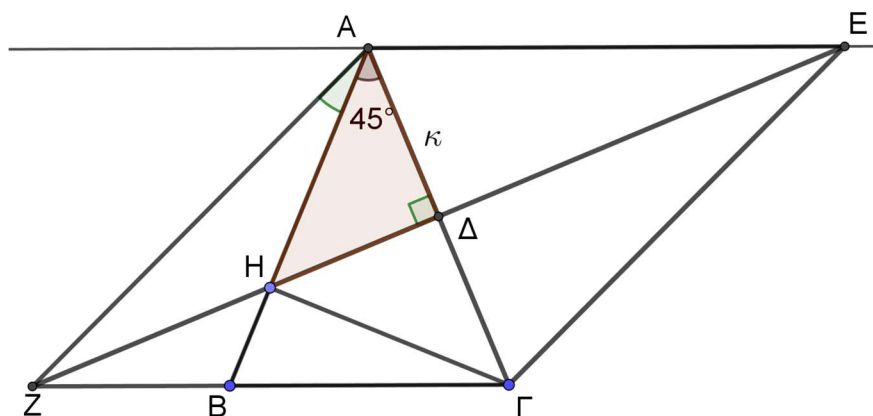
Εύκολα βλέπουμε ότι μόνο ο αριθμός 180 ισούται με το 20πласιο του αθροίσματος των ψηφίων του.

Πρόβλημα 3

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$ και $\hat{A} = 45^\circ$. Το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς AG. Η μεσοκάθετη της πλευράς AG τέμνει την παράλληλη ευθεία από το σημείο A προς την ευθεία BΓ στο σημείο E, την πλευρά AB στο σημείο H και την ευθεία BΓ στο σημείο Z.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{ZAB}$.

(β) Αν $AD = \kappa$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου AZΓE συναρτήσει του κ .



Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$ και $\hat{A} = 45^\circ$, έπεται ότι

$$\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}Z = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ.$$

Επειδή η ευθεία ZE είναι μεσοκάθετη της πλευράς AG, έπεται ότι το τρίγωνο ZAG είναι ισοσκελές με $ZA = ZG$, οπότε θα είναι και

$$\hat{A}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Gamma}\hat{A}Z = \hat{A} + \hat{ZAB} \Rightarrow \hat{ZAB} = 67,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ.$$

(β) Το τρίγωνο AHΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $H\Delta = AD = \kappa$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$AH^2 = \kappa^2 + \kappa^2 = 2\kappa^2 \Rightarrow AH = \kappa\sqrt{2}.$$

Επειδή η γωνία $\hat{AH}\Delta = 45^\circ$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο AHZ έχουμε

$$\widehat{A\hat{H}\Delta} = \widehat{Z\hat{A}H} + \widehat{H\hat{Z}A} \Rightarrow \widehat{H\hat{Z}A} = \widehat{A\hat{H}\Delta} - \widehat{Z\hat{A}H} = 45^\circ - 22,5^\circ = 22,5^\circ.$$

Άρα το τρίγωνο AHZ είναι ισοσκελές με $ZH = AH = x\sqrt{2}$, οπότε $Z\Delta = \kappa + \kappa\sqrt{2}$.

Επειδή $AE \parallel Z\Gamma$ έχουμε

$$\widehat{\Gamma\hat{Z}E} = \widehat{A\hat{E}Z} \quad (\text{εντός εναλλάξ})$$

Επίσης λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη ZE της AG έχουμε

$$\widehat{\Gamma\hat{Z}E} = \widehat{A\hat{Z}E}.$$

Άρα είναι $\widehat{A\hat{Z}E} = \widehat{A\hat{E}Z}$, οπότε το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές με $AZ = AE$, οπότε τελικά είναι $AZ = AE = \Gamma E = \Gamma Z$ και επομένως τα ισοσκελή τρίγωνα AZΓ και AEG έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (η πλευρά AG είναι κοινή), οπότε είναι ίσα.

Επομένως το εμβαδόν του τετραπλεύρου AZΓE είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου AZΓ. Επειδή $AG = 2x$, $Z\Delta = \kappa + \kappa\sqrt{2}$, έχουμε:

$$(AZ\Gamma E) = 2 \cdot (AZ\Gamma) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\kappa \cdot (\kappa + \kappa\sqrt{2}) = 2\kappa^2(1 + \sqrt{2}).$$

A' ΛΥΚΕΙΟΥ

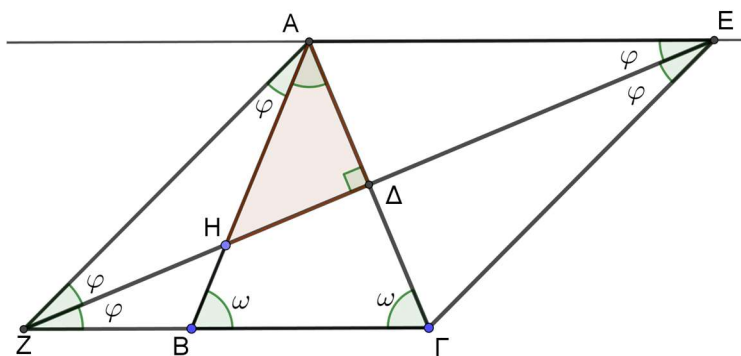
Πρόβλημα 1

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$. Η μεσοκάθετη της πλευράς AG τέμνει την παράλληλη ευθεία από το σημείο A προς την ευθεία BΓ στο σημείο E, την πλευρά AB στο σημείο H και την ευθεία BΓ στο σημείο Z. Δίνεται ότι: $\widehat{A\hat{Z}H} = \widehat{Z\hat{A}H}$.

(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABΓ.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο AZΓE είναι ρόμβος.

Λύση



Έστω $\widehat{A\hat{Z}H} = \widehat{Z\hat{A}H} = \varphi$ και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \omega$, οπότε $\widehat{A} = 180^\circ - 2\omega$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο AZΔ έχουμε:

$$\widehat{\Delta\hat{A}Z} + \widehat{\Delta\hat{Z}A} = 90^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - 2\omega + \varphi + \varphi = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \omega - \varphi = 45^\circ \quad (1)$$

Λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη της πλευράς AG, έχουμε $\widehat{A\hat{Z}H} = \widehat{H\hat{Z}B} = \varphi$,

οπότε από το τρίγωνο ABZ και την εξωτερική του γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ έχουμε

$$\omega = \widehat{AB\Gamma} = 3\varphi \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$2\varphi = 45^\circ \Leftrightarrow \varphi = 22,5^\circ \text{ και } \omega = 67,5^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = \omega = 67,5^\circ \text{ και } \widehat{A} = 180^\circ - 2\omega = 45^\circ.$$

(β) Επειδή $AE \parallel Z\Gamma$ έχουμε

$$\widehat{\Gamma ZE} = \widehat{AEZ} \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

Επίσης λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη ZE της ΑΓ έχουμε

$$\widehat{\Gamma ZE} = \widehat{AZE} = \varphi.$$

Άρα είναι $\widehat{AZE} = \widehat{AEZ} = \varphi$, οπότε το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές με $AZ = AE$. Λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη ZE της ΑΓ έχουμε τελικά $AZ = AE = \Gamma E = \Gamma Z$.

Επίσης, λόγω συμμετρίας ως προς τη μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ, έχουμε

$$\widehat{\Gamma EZ} = \widehat{AEZ} = \varphi = \widehat{AZE},$$

οπότε οι ευθείες AZ και ΓE τεμνόμενες από την ευθεία ZE σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, οπότε $\Gamma E \parallel AZ$.

Επομένως το τετράπλευρο AZΓE είναι παραλληλόγραμμο που έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x, y) τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) + 4(x + y - 1) = 0.$$

Λύση

Μετά τις πράξεις η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} (xy + 1)^2 + (x + y)^2 &= 0 \Leftrightarrow xy + 1 = 0 \text{ και } x + y = 0 \Leftrightarrow xy = -1 \text{ και } y = -x \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ και } y = -x \Leftrightarrow (x, y) = (1, -1) \text{ ή } (x, y) = (-1, 1). \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3 (8 μονάδες)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$ τέτοιοι ώστε:

$$\frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} = \alpha.$$

(α) Να εκφράσετε την παράσταση $\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1}$ συναρτήσει του α .

(β) Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του α ώστε

$$\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \alpha.$$

Λύση

(α) Από την δεδομένη ισότητα έχουμε

$$\frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} = \alpha \Rightarrow \frac{1}{\beta + \frac{1}{\beta} + 1} = \alpha \Rightarrow \beta + \frac{1}{\beta} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}.$$

Άρα έχουμε

$$\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow \beta^2 + \frac{1}{\beta^2} + 2 = \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow \beta^2 + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2}{\alpha^2},$$

μέσω της οποίας προκύπτει

$$\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \frac{1}{\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} + 1} = \frac{1}{\frac{1 - 2\alpha - \alpha^2}{\alpha^2} + 1} = \frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha}.$$

(β) Έχουμε

$$\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha} \Leftrightarrow 1 - 2\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}.$$

2ος τρόπος

(α) Είναι $\beta^2 + \beta + 1 = \frac{\beta}{\alpha}$, οπότε $\beta^2 + 1 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\beta$, και άρα

$$\beta^4 + 2\beta^2 + 1 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \beta^2 = \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} + 1\right)\beta^2.$$

Έτσι έχουμε

$$\beta^4 + \beta^2 + 1 = \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha}\right)\beta^2 = \frac{1 - 2\alpha}{\alpha^2}\beta^2,$$

οπότε $1 - 2\alpha \neq 0$ και

$$\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha}.$$

(β) Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\beta^4 + \beta^2 + 1 = (\beta^4 + 2\beta^2 + 1) - \beta^2 = (\beta^2 + 1)^2 - \beta^2 = (\beta^2 + \beta + 1)(\beta^2 - \beta + 1),$$

οπότε

$$\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} \cdot \frac{\beta}{\beta^2 - \beta + 1} = \alpha \cdot \frac{\beta}{\beta^2 - \beta + 1}$$

Αφού $\alpha \neq 0$, από την παραπάνω ισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \alpha &\Leftrightarrow \beta = \beta^2 - \beta + 1 \Leftrightarrow 3\beta = \beta^2 + \beta + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Σχόλια. Η παραγοντοποίηση στη λύση του (β) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει μια ακόμη λύση στο (α) ως εξής:

Έχουμε

$$\frac{\beta^2 - \beta + 1}{\beta} = \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\beta} - 2 = \frac{1}{a} - 2 = \frac{1 - 2a}{a}.$$

Έτσι $1 - 2a \neq 0$ και

$$\frac{\beta}{\beta^2 - \beta + 1} = \frac{a}{1 - 2a},$$

οπότε

$$\frac{\beta^2}{\beta^4 + \beta^2 + 1} = \frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} \cdot \frac{\beta}{\beta^2 - \beta + 1} = \frac{\alpha^2}{1 - 2a}.$$

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τις δυνατές τιμές του x , αν ισχύουν οι ισότητες:

$$x = \frac{\delta}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma + \delta} = \frac{\beta}{\gamma + \delta + \alpha} = \frac{\gamma}{\delta + \alpha + \beta},$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του 0.

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε

$$x(\alpha + \beta + \gamma) = \delta, \quad x(\beta + \gamma + \delta) = \alpha, \quad x(\gamma + \delta + \alpha) = \beta, \quad x(\delta + \alpha + \beta) = \gamma,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$3x(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \alpha + \beta + \gamma + \delta. \quad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

(1) Αν $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$, τότε από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι:

$$3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

(2) Αν $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$, τότε από την υπόθεση έχουμε

$$x = \frac{\delta}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\delta}{-\delta} = -1,$$

η οποία επαληθεύει και τις υπόλοιπες σχέσεις της υπόθεσης.

Άρα οι δυνατές τιμές του x είναι $\frac{1}{3}$ και -1 .

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 36^\circ$. Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = AB$. Από το Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά AB και πάνω σε αυτή παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Delta E = A\Delta$ και τα σημεία A και

Ε να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΒΓ. Αν η ευθεία ΒΕ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΖ είναι κάθετη προς την πλευρά ΑΒ.

Λύση

Επειδή $\hat{A} = 36^\circ$ και $AB = AG$, έπεται ότι

$$\omega = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

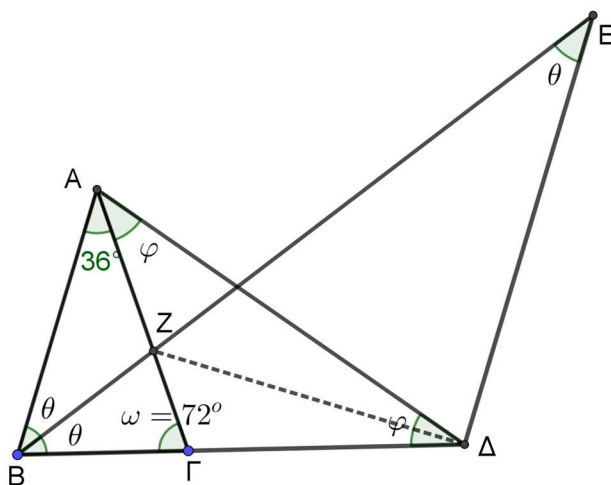
Επειδή $ΓΔ = AB$, έπεται ότι

$$\hat{B\Delta A} = \hat{\Gamma\Delta A} = \hat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \varphi.$$

Επειδή η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΓΔ έπεται ότι

$$\omega = 2\varphi \Rightarrow 2\varphi = 72^\circ \Rightarrow \varphi = 36^\circ = \hat{A}.$$

Άρα η ευθεία ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B\hat{A}\Delta}$.



Επειδή $\hat{B\hat{A}\Delta} = \hat{A} + \hat{\Gamma\hat{A}\Delta} = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ = \hat{B}$, έπεται ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $\Delta A = \Delta B$.

Επειδή $\Delta E \parallel AB$, έπεται ότι $\hat{A\hat{D}E} = \hat{B\hat{A}\Delta} = 72^\circ$, οπότε

$$\hat{B\hat{D}E} = \hat{B\hat{A}\Delta} + \hat{A\hat{D}E} = 36^\circ + 72^\circ = 108^\circ,$$

οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΕ έπεται ότι

$$\hat{\Delta\hat{B}E} = \hat{\Delta\hat{E}B} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

Άρα είναι $\hat{A\hat{B}E} = \hat{B} - \hat{\Delta\hat{B}E} = 36^\circ = \hat{\Delta\hat{B}E}$, οπότε η ευθεία ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\hat{B}\Delta}$. Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΔ το σημείο Ζ είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του. Άρα η ευθεία ΔΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B\hat{A}\Delta}$ και επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $\Delta A = \Delta B$ έπεται ότι η ευθεία ΔΖ είναι και ύψος, δηλαδή $\Delta Z \perp AB$.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε την αναγκαία και ικανή συνθήκη μεταξύ των παραμέτρων $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, έτσι ώστε να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x, y \neq 0$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a \quad \text{και} \quad \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = b.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος με ύψωση των δύο μελών στον κύβο και λαμβάνοντας υπόψη τη δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{3}{xy} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = a^3 \Leftrightarrow \frac{3a}{xy} = a^3 - b \Leftrightarrow xy = \frac{3a}{a^3 - b}.$$

Σημειώνουμε ότι από τις υποθέσεις είναι

$$a^3 - b = \frac{3a}{xy} \neq 0.$$

Τότε η πρώτη εξίσωση μας δίνει

$$x + y = axy \Leftrightarrow x + y = \frac{3a^2}{a^3 - b}.$$

Επομένως οι άγνωστοι x, y είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$t^2 - \frac{3a^2}{a^3 - b} \cdot t + \frac{3a}{a^3 - b} = 0,$$

η οποία έχει ρίζες στους πραγματικούς αριθμούς, αν, και μόνον αν, η διακρίνουσά της είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, δηλαδή

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{3a^2}{a^3 - b} \right)^2 - \frac{12a}{a^3 - b} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9a^4 - 12a(a^3 - b)}{(a^3 - b)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3a^4 + 12ab}{(a^3 - b)^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -3a^4 + 12ab \geq 0 \Leftrightarrow 3a(4b - a^3) \geq 0 \stackrel{a>0}{\Leftrightarrow} a^3 \leq 4b. \end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x, y \neq 0$ που ικανοποιούν τις δεδομένες σχέσεις, αν, και μόνον αν,

$$a^3 \leq 4b \quad \text{και} \quad a^3 \neq b.$$

(2^{ος} τρόπος)

Μπορούμε να εργαστούμε ανάλογα με τον πρώτο τρόπο, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό

$$\frac{1}{x} = \varphi, \quad \frac{1}{y} = \omega$$

οπότε θα προκύψουν σχέσεις

$$\varphi + \omega = a \quad \text{και} \quad \varphi^3 + \omega^3 = b$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$|\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta\gamma| = |\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 1|,$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2 \text{ και } B = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + 1.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Επειδή οι παραστάσεις A και B εμφανίζουν τα τετράγωνα των όρων των δύο παραστάσεων της δεδομένης ισότητας θεωρούμε τα τετράγωνα των δύο μελών της δεδομένης ισότητας. Έχουμε:

$$|\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta\gamma| = |\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 1| \Rightarrow$$

$$(\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta\gamma)^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 1)^2 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha + 2\alpha^2\beta\gamma + 2\alpha\beta^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma^2 =$$

$$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + 1 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha + 2\alpha^2\beta\gamma + 2\alpha\beta^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma^2 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + 1 \Rightarrow A = B.$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη διαφορά

$$\begin{aligned} A - B &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2\beta^2\gamma^2 - (\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + 1) \\ &= (\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)(\gamma^2 - 1). \end{aligned}$$

Ισχύουν οι ισότητες

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = \alpha\beta\gamma + \alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 1,$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) = \alpha\beta\gamma + \alpha + \beta + \gamma - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 1),$$

από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1)(\gamma^2 - 1) = (\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta + \gamma)^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + 1)^2 = 0 \Rightarrow A = B$$

Πρόβλημα 2

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$f(xy) = xf(y) + f(x) - 2024x.$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $f(f(1)) = 1$, να βρείτε την τιμή του $f(2025)$.

Λύση

Για $y = 0$, η δοθείσα σχέση δίνει

$$f(0) = xf(0) + f(x) - 2024x \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(0) - (f(0) - 2024)x, \quad (2)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 1$, η δοθείσα σχέση δίνει

$$f(y) = f(y) + f(1) - 2024 \Rightarrow f(1) = 2024,$$

οπότε από τη σχέση $f(f(1)) = 1$, προκύπτει ότι: $f(2024) = f(f(1)) = 1$.

Για $x = 2024$, η σχέση (1) δίνει

$$f(0) = 2024f(0) + 1 - 2024^2 \Rightarrow f(0) = \frac{1 - 2024^2}{1 - 2024} = 1 + 2024 = 2025,$$

οπότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε

$$f(x) = 2025 - (2025 - 2024)x = 2025 - x \Rightarrow f(2025) = 0.$$

Πρόβλημα 3

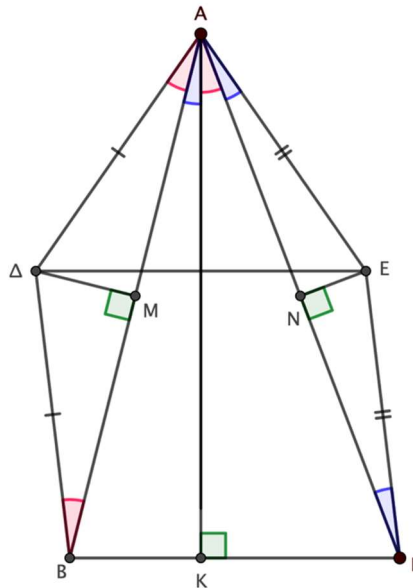
Στο εξωτερικό ενός οξυγώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε δύο ισοσκελή τρίγωνα ΔDB και $AE\Gamma$, με $AD = DB$ και $AE = E\Gamma$, τέτοια ώστε

$$\widehat{ADB} = 2 \cdot \widehat{A\Gamma B} \text{ και } \widehat{AEG} = 2 \cdot \widehat{AB\Gamma}.$$

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BDE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω K , M , και N σημεία στις πλευρές $B\Gamma$, AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ τέτοια ώστε να ισχύουν: $AK \perp B\Gamma$, $DM \perp AB$, και $EN \perp A\Gamma$.



Αφού το τρίγωνο ΔDB είναι ισοσκελές, η DM είναι διάμεσος, και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ADB}$. Τότε $\widehat{BDM} = \widehat{B\Gamma A}$, οπότε $\widehat{DBA} = 90^\circ - \widehat{A\Gamma B}$. Ομοίως, $\widehat{E\Gamma A} = 90^\circ - \widehat{AB\Gamma}$. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} \widehat{DB\Gamma} + \widehat{E\Gamma B} &= (\widehat{DBA} + \widehat{AB\Gamma}) + (\widehat{E\Gamma A} + \widehat{A\Gamma B}) \\ &= (90^\circ - \widehat{A\Gamma B}) + \widehat{AB\Gamma} + (90^\circ - \widehat{AB\Gamma}) + \widehat{A\Gamma B} = 180^\circ. \end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε: $DB \parallel E\Gamma$.

Για να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta B = E\Gamma$. Πράγματι, από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων $\Delta B M$ και $\Gamma A K$ ($\widehat{\Delta B M} = 90^\circ - \widehat{B\Gamma A} = \widehat{\Gamma A K}$), και αφού $\Gamma A = 2\Gamma N$, παίρνουμε:

$$\frac{\Delta B}{B M} = \frac{\Gamma A}{A K} = \frac{2 \cdot \Gamma N}{A K} \quad (1)$$

Από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων $E\Gamma N$ και $B A K$, και αφού $B A = 2 \cdot B M$, παίρνουμε

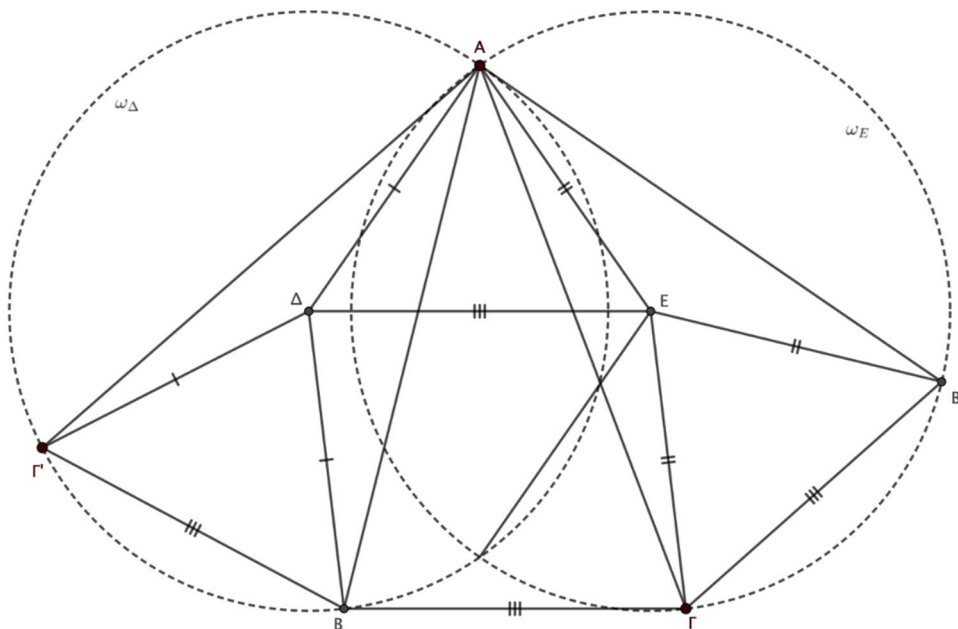
$$\frac{E\Gamma}{\Gamma N} = \frac{B A}{A K} = \frac{2 \cdot B M}{A K} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $\Delta B = E\Gamma$, όπως θέλαμε.

Σχόλιο. Οι σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν και από τον τύπο του ημιτόνου σε ορθογώνιο τρίγωνο.

(2ος τρόπος)

Έστω Γ' σημείο στον κύκλο ω_Δ με κέντρο το Δ και ακτίνα $\Delta A = \Delta B$ τέτοιο ώστε $\widehat{\Gamma' A B} = \widehat{B A \Gamma}$, και έστω B' σημείο στον κύκλο ω_E με κέντρο το E και ακτίνα $E A = E\Gamma$ τέτοιο ώστε $\widehat{B' A \Gamma} = \widehat{\Gamma A B}$.



Αφού κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο, έχουμε

$$\widehat{A\Gamma'B} = \frac{\widehat{A\Delta B}}{2} = \widehat{A\Gamma B} \quad \text{και} \quad \widehat{\Gamma'\Delta B} = 2 \cdot \widehat{\Gamma' A B} = 2 \cdot \widehat{B A \Gamma}.$$

Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου, έπεται ότι $\widehat{\Gamma'BA} = \widehat{AB\Gamma}$, και άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma'$ και $AB\Gamma$ είναι ίσα, από Γ-Π-Γ, με κοινή πλευρά την AB . Συνεπώς, είναι $DA = DB = R$, όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. Ομοίως, $AE = EG = R$.

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta AE} &= \widehat{\Delta AB} + \widehat{BA\Gamma} + \widehat{\Gamma AE} = (90^\circ - \widehat{A\Gamma B}) + \widehat{BA\Gamma} + (90^\circ - \widehat{AB\Gamma}) \\ &= (180^\circ - \widehat{A\Gamma B} - \widehat{AB\Gamma}) + \widehat{BA\Gamma} \\ &= 2 \cdot \widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Gamma' \Delta B}.\end{aligned}$$

Αφού $\Gamma'D = DB = AD = AE = R$, τα ισοσκελή τρίγωνα $\Gamma'DB$ και ΔAE είναι ίσα από Π-Γ-Π, οπότε $\Delta E = B\Gamma' = B\Gamma$. Επομένως, το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, και άρα είναι παραλληλόγραμμο.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
86ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
7 Νοεμβρίου 2025

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left(\frac{(-5)^2 - (-3)^2}{(-4)^2} \right)^{2025} - \frac{43}{21} \quad \text{και} \quad B = ((10 - 5)^2 + (-2)^3 - 18)^{2024} - \frac{63}{31},$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-5)^2 - (-3)^2}{(-4)^2} \right)^{2025} - \frac{43}{21} = \left(\frac{25 - 9}{16} \right)^{2025} + \frac{43}{21} = 1^{2025} - \frac{43}{21} \\ &= 1 - \frac{43}{21} = -\frac{22}{21}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= ((10 - 5)^2 + (-2)^3 - 18)^{2024} - \frac{63}{31} = (5^2 - 8 - 18)^{2024} - \frac{63}{31} \\ &= (25 - 8 - 18)^{2024} - \frac{63}{31} = (-1)^{2024} - \frac{63}{31} = 1 - \frac{63}{31} = -\frac{32}{31}. \end{aligned}$$

Επειδή

$$\begin{aligned} A - B &= -\frac{22}{21} - \left(-\frac{32}{31} \right) = -\frac{22}{21} + \frac{32}{31} = -\frac{22 \cdot 31}{21 \cdot 31} + \frac{32 \cdot 21}{21 \cdot 31} \\ &= \frac{-682 + 672}{651} = -\frac{10}{651} < 0 \Rightarrow A < B. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι α, β , με $\alpha \leq \beta$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη 15 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο 60. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές των α, β .

Λύση

Οι δυνατές τιμές του α είναι τα θετικά πολλαπλάσια του 15 που είναι μικρότερα ή ίσα του 60, δηλαδή $\alpha \in \{15, 30, 45, 60\}$. Ομοίως, οι δυνατές τιμές του β είναι τα θετικά πολλαπλάσια του 15 που είναι μικρότερα ή ίσα του 60, δηλαδή $\beta \in \{15, 30, 45, 60\}$.

Έστω $\alpha = 15$. Τότε η μόνη δυνατή τιμή για το β είναι το 60. Αν ήταν $\beta = 15$ ή 30 ή 45, τότε θα είχαμε $EKP\{\alpha, \beta\} = 15$ ή 30 ή 45, αντίστοιχα, που είναι διαφορετικά από το 60.

Έστω $\alpha = 30$. Τότε δεν υπάρχει δυνατή τιμή για το $\beta \geq 30$.

Πράγματι, αν ήταν $\beta = 30$, τότε θα είχαμε $MKD\{\alpha, \beta\} = MKD\{30, 30\} = 30 \neq 15$, αν ήταν $\beta = 45$, τότε θα είχαμε $EKP\{\alpha, \beta\} = EKP\{30, 45\} = 90 \neq 60$, ενώ αν ήταν $\beta = 60$, τότε θα είχαμε $MKD\{\alpha, \beta\} = MKD\{30, 60\} = 30 \neq 15$.

Έστω $\alpha = 60$. Επειδή πρέπει $\beta \geq \alpha$, έπεται ότι $\beta = 60$ οπότε

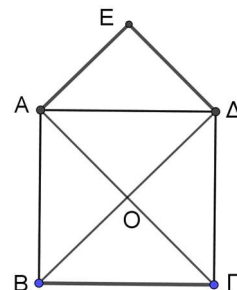
$$MKD\{\alpha, \beta\} = MKD\{60, 60\} = 60 \neq 15.$$

Άρα οι μόνες δυνατές τιμές είναι: $\alpha = 15, \beta = 60$.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο και O είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Delta$ και $A\epsilon$ είναι παράλληλα. Επίσης, τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $\Delta\epsilon$ είναι παράλληλα.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AODE$ είναι τετράγωνο.



Λύση

Το τετράπλευρο $AODE$ έχει, από την υπόθεση, τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Άρα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, δηλαδή

$$AO = \epsilon\Delta \text{ και } A\epsilon = O\Delta. \quad (1)$$

Επειδή το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, οι διαγώνιες του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται, οπότε θα είναι

$$AO = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} = O\Delta. \quad (2)$$

$$\widehat{AOD} = 90^\circ \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε ότι: $AO = O\Delta = \Delta\epsilon = \epsilon A$. Άρα το τετράπλευρο $AODE$ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες και μία γωνία του ορθή, οπότε είναι τετράγωνο.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left(\left(-\frac{18}{3} \right)^2 + \frac{(-2)^2}{3^2} \right) \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3},$$

$$B = \frac{(-18)^8}{3^8} - \left(-\frac{1}{6} \right)^{-8} - \frac{25}{117}.$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \left(\left(-\frac{18}{3} \right)^2 + \frac{(-2)^2}{3^2} \right) \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3} \\ &= \left((-6)^2 + \frac{4}{9} \right) \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3} = \left(36 + \frac{4}{9} \right) \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{328}{9} \cdot \frac{1}{78} - \frac{2}{3} = \frac{164}{9} \cdot \frac{1}{39} - \frac{2}{3} = \frac{164}{351} - \frac{2}{3} = \frac{164}{351} - \frac{234}{351} = -\frac{70}{351}. \\ B &= \frac{(-18)^8}{3^8} - \left(-\frac{1}{6} \right)^{-8} - \frac{25}{117} = \left(\frac{-18}{3} \right)^8 - (-6)^8 - \frac{25}{117} \\ &= (-6)^8 - (-6)^8 - \frac{25}{117} = -\frac{25}{117} = -\frac{75}{351}. \end{aligned}$$

Επειδή είναι:

$$-\frac{75}{351} < -\frac{70}{351}, \quad \text{έπεται ότι} \quad \frac{75}{351} > \frac{70}{351} \Rightarrow A > B.$$

Διαφορετικά θεωρούμε τη διαφορά A - B:

$$A - B = -\frac{70}{351} - \left(-\frac{25}{117} \right) = \frac{25}{117} - \frac{70}{351} = \frac{75 - 70}{351} = \frac{5}{351} > 0 \Rightarrow A > B.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί

$$A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma, B = \overline{\beta\gamma} = 10\beta + \gamma, \Gamma = \overline{\alpha\beta} = 10\alpha + \beta, \quad \text{με } \alpha, \beta \neq 0.$$

Αν ο αριθμός A είναι πολλαπλάσιο του 3, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του A για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$A = B + 8\Gamma.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} 100\alpha + 10\beta + \gamma &= 10\beta + \gamma + 8(10\alpha + \beta) \Leftrightarrow 100\alpha = 80\alpha + 8\beta \\ \Leftrightarrow 20\alpha &= 8\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{20\alpha}{8} \Leftrightarrow \beta = \frac{5\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Οι δυνατές τιμές του ψηφίου $\alpha \neq 0$ είναι τα πολλαπλάσια του 2, δηλαδή τα ψηφία 2, 4, 6, 8. Τότε η τιμή του β που προκύπτει είναι 5, 10, 15, 20, αντίστοιχα, από τις οποίες δεκτή είναι μόνον η τιμή $\beta = 5$.

Επομένως, έχουμε:

$$A = \overline{25\gamma}, \text{ όπου } \gamma \text{ ψηφίο με } 0 \leq \gamma \leq 9.$$

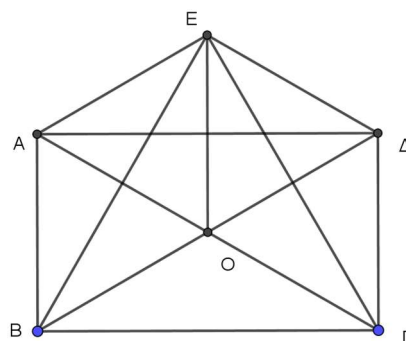
Το ψηφίο γ πρέπει να επιλεγεί έτσι, ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να διαιρείται με το 3. Επομένως, αρκεί το άθροισμα των ψηφίων του A να διαιρείται με το 3, οπότε οι δυνατές τιμές του γ είναι 2, 5 και 8, οπότε τελικά έχουμε:

$$A = 252 \text{ ή } A = 255 \text{ ή } A = 258.$$

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο και O είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ευθεία AE είναι παράλληλη προς την ευθεία BD και η ευθεία ED είναι παράλληλη προς την ευθεία AG . Να αποδείξετε ότι:

1. Το τετράπλευρο $AO\Delta E$ είναι ρόμβος.
2. $EB = E\Gamma$.



Λύση

1. Το τετράπλευρο $AO\Delta E$ έχει, από την υπόθεση, τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Άρα είναι παραλληλόγραμμο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, δηλαδή

$$AO = E\Delta \text{ και } AE = O\Delta. \quad (1)$$

Επειδή το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιες του είναι ίσες και διχοτομούνται, οπότε θα είναι

$$AO = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} = O\Delta. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι: $AO = O\Delta = \Delta E = EA$. Άρα το τετράπλευρο $AO\Delta E$ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

2. Επειδή $EA = E\Delta$ και $OA = O\Delta$, έπεται ότι η ευθεία EO είναι μεσοκάθετη της πλευράς AD του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, οπότε θα είναι και άξονας συμμετρίας του. Τα σημεία B και Γ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα EO , οπότε και τα τμήματα EB και $E\Gamma$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα EO . Άρα είναι ίσα.

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους A οι οποίοι είναι 2025 φορές μεγαλύτεροι από το τελευταίο ψηφίο τους.

Λύση

Έστω x το τελευταίο ψηφίο του A . Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$A = M + x, \text{ όπου } M = 10B = \text{πολλαπλάσιο του } 10.$$

Αφού ο A είναι 2025 φορές το τελευταίο του ψηφίο, θα ισχύει:

$$10B + x = 2025x \Leftrightarrow 2024x = 10B.$$

Για να είναι πολλαπλάσιο του 10 το αριστερό μέλος, πρέπει το ψηφίο x να είναι το 0 ή το 5. Όμως ο x δεν μπορεί να είναι 0, γιατί τότε θα είχαμε $A = 0$.

Άρα πρέπει να ισούται με 5 και ο μοναδικός θετικός ακέραιος με αυτή την ιδιότητα είναι ο **2024 · 5 = 10125**.

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα:

$$4x^2 + 9y^2 + x^2y^2 + 18xy - 4x - 6y + 10 = 0,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = 8x^3 + 27y^3.$$

Λύση

Η παράσταση A μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$A = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)^3 - 3 \cdot 2x \cdot 3y(2x + 3y) \Rightarrow$$

$$A = (2x + 3y)^3 - 18xy(2x + 3y) \quad (1)$$

Επομένως, θα προσπαθήσουμε από τη δεδομένη ισότητα να εμφανίσουμε τις παραστάσεις $2x + 3y$ και xy .

Η δεδομένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$(2x)^2 + (3y)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + 6xy + x^2y^2 - 2(2x + 3y) + 10 = 0$$

$$(2x + 3y)^2 - 2(2x + 3y) + 1 + x^2y^2 + 6xy + 9 = 0$$

$$(2x + 3y - 1)^2 + (xy + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x + 3y = 1 \quad (2) \quad \text{και} \quad xy = -3 \quad (3)$$

Άρα έχουμε:

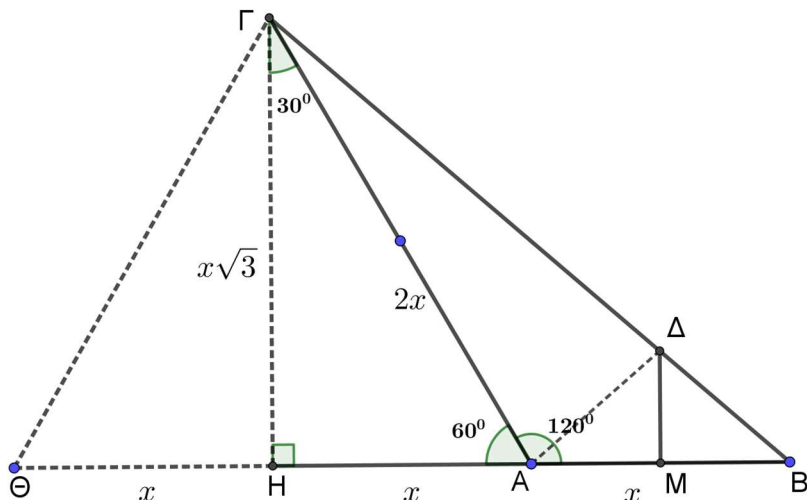
$$A = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)^3 - 3 \cdot 2x \cdot 3y(2x + 3y)$$

$$\Rightarrow A = 1^3 - 18 \cdot (-3) \cdot 1 = 55.$$

Πρόβλημα 3

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι: $\hat{A} = 120^\circ$ και $A\Gamma = 2 \cdot AB$. Αν η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ , να βρεθεί ο λόγος $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$.

Λύση



Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το μέρος του A και φέρουμε από την κορυφή Γ κάθετη προς την ευθεία AB που την τέμνει, έστω στο H .

Επειδή $\hat{BAG} = 120^\circ$, έπεται ότι: $\hat{GAH} = 60^\circ$ και $\hat{AGH} = 30^\circ$. Αν Θ είναι το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ΓH , τότε το τρίγωνο $A\Gamma\Theta$ είναι ισόπλευρο. Αν $AB = x$, τότε $A\Gamma = 2x$ και $AH = H\Theta = x$.

Επειδή η ευθεία $M\Delta$, όπου M μέσο της πλευράς AB , είναι μεσοκάθετη της πλευράς AB έπεται ότι:

$$A\Delta = \Delta B \text{ και } AM = BM = \frac{x}{2}.$$

Επειδή $\Delta M \perp AB$ και $\Gamma H \perp AB$, έπεται ότι $\Delta M \parallel \Gamma H$, οπότε από το θεώρημα του Θαλή, έχουμε:

$$\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{BM}{MH} = \frac{BM}{MA + AH} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2} + x} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

(2ος τρόπος)

Έστω K σημείο στην προέκταση της BA προς το A τέτοιο ώστε $\Gamma K \perp BA$, και έστω M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$. Τότε η KM είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΓMA που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε είναι $KM = MA$. Αφού $\hat{KAM} = 60^\circ$, το ισοσκελές τρίγωνο KMA είναι ισόπλευρο, οπότε

$$KA = MA = \frac{A\Gamma}{2} = AB,$$

δηλαδή το A είναι το μέσο του KB . Αν N είναι το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $BK\Gamma$, τότε θα είναι $NK = NB$.

Επομένως, τα ισοσκελή τρίγωνα KNB , $\text{A}\Delta\text{B}$ είναι όμοια, αφού έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, και άρα:

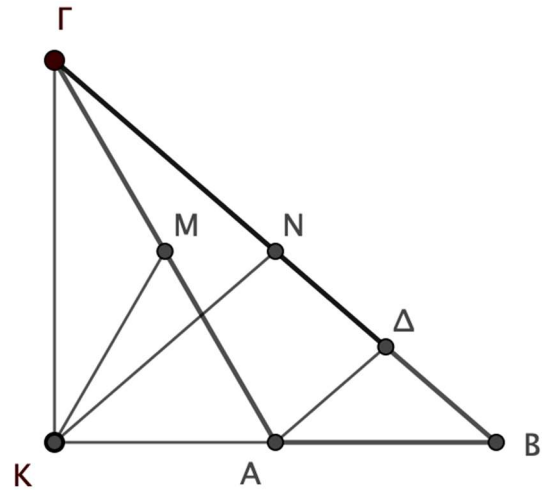
$$\frac{\text{N}\Delta}{\Delta\text{B}} = \frac{\text{KA}}{\text{AB}} = 1,$$

δηλαδή $\text{N}\Delta = \Delta\text{B} = \text{A}\Delta$.

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}\Gamma\Delta &= \Gamma\text{N} + \text{N}\Delta = \text{NB} + \text{N}\Delta \\ &= 2 \cdot \text{A}\Delta + \text{A}\Delta = 3 \cdot \text{A}\Delta.\end{aligned}$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος λόγος είναι ίσος με $1/3$.



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Αν οι a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και η εξίσωση

$$3x^2 - 2(2a + b)x + 2a^2 + 2ab + b^2 - 1 = 0$$

με άγνωστο το x έχει πραγματικές λύσεις, να αποδείξετε ότι:

$$(1). \quad a^2 + ab + b^2 \leq \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad (2). \quad a + b \leq \sqrt{2}.$$

Λύση.

(1) Αφού η δεδομένη εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις, η διακρίνουσά της θα είναι μη αρνητική, δηλαδή

$$\Delta = 4[(2a + b)^2 - 3(2a^2 + 2ab + b^2 - 1)] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2a + b)^2 - 3(2a^2 + 2ab + b^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$3 - 2(a^2 + ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 \leq \frac{3}{2}$$

(2) Ισχύει ότι:

$$a^2 + b^2 + ab \geq 2ab + ab = 3ab,$$

οπότε θα έχουμε:

$$3ab \leq \frac{3}{2} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}.$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τις προηγούμενες ανισότητες και το ότι $a, b > 0$, έχουμε:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2 + ab \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow |a + b| \leq \sqrt{2} \Rightarrow a + b \leq \sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB < BΓ$, και σημεία Ε και Ζ στις πλευρές ΑΔ και ΓΔ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε τα τρίγωνα ΒΑΕ και ΒΓΖ να έχουν ίσα εμβαδά. Αν επιπλέον ισχύει ότι $AB^2 = AE \cdot AD$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.

Λύση

Αφού τα ορθογώνια τρίγωνα BAE και BΓZ έχουν ίσα εμβαδά, ισχύει

$$\frac{1}{2} \cdot BA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot \Gamma Z,$$

δηλ. $BA \cdot AE = B\Gamma \cdot \Gamma Z$, ή ισοδύναμα,

$$\Delta\Gamma \cdot AE = \Delta A \cdot \Gamma Z$$

αφού $BA = \Delta\Gamma$ και $B\Gamma = \Delta A$.

Τότε έχουμε:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \frac{\Gamma Z}{AE} = \frac{\Delta\Gamma - \Gamma Z}{\Delta A - AE} = \frac{\Delta Z}{\Delta E}.$$

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta A\Gamma$ και ΔEZ έχουν την ορθή γωνία κοινή και ίσους τους λόγους των καθετών πλευρών τους, οπότε θα είναι $EZ \parallel A\Gamma$ και άρα $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{E\hat{Z}\Delta}$, ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών $A\Gamma$ και ZE με τέμνουσα την ΓZ .

Επιπλέον, τα τρίγωνα BAE και $\Delta\Gamma$ είναι όμοια, αφού έχουν

$$\frac{BA}{AE} = \frac{\Delta A}{AB} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} \text{ και } \widehat{BAE} = \widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} = 90^\circ.$$

Επομένως θα έχουν

$$\widehat{AEB} = \widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} = \widehat{E\hat{Z}\Delta},$$

οπότε θα είναι:

$$\widehat{AEB} = \widehat{E\hat{Z}\Delta} = \widehat{Z\hat{\Delta}E} - \widehat{Z\hat{E}\Delta} = 90^\circ - \widehat{Z\hat{E}\Delta}.$$

Άρα είναι $\widehat{AEB} + \widehat{Z\hat{E}\Delta} = 90^\circ$, οπότε $\widehat{B\hat{E}Z} = 90^\circ$.

Διαφορετικά, μπορούμε από τα ορθογώνια τρίγωνα $\Delta A\Gamma$ και ΔEZ , με χρήση τριγωνομετρίας, να έχουμε

$$\varepsilon\varphi \widehat{\Delta A\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \frac{\Delta Z}{\Delta E} = \varepsilon\varphi \widehat{\Delta E\hat{Z}},$$

οπότε $\widehat{\Delta A\Gamma} = \widehat{\Delta E\hat{Z}}$ και άρα για τις συμπληρωματικές τους είναι $\widehat{A\hat{\Gamma}\Delta} = \widehat{E\hat{Z}\Delta}$.

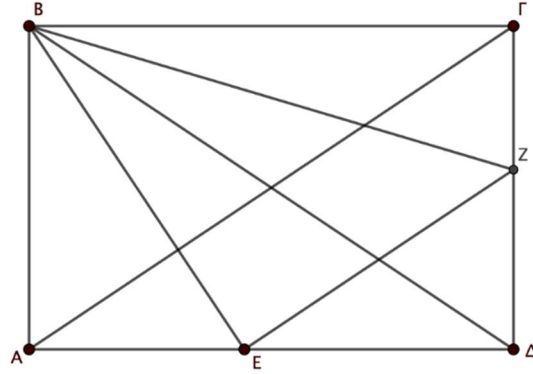
Αφού $AB^2 = AE \cdot A\Delta$, στα ορθογώνια τρίγωνα AEB και ΔEZ είναι

$$\varepsilon\varphi \widehat{AEB} = \frac{AB}{AE} = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta A}{\Delta\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta Z} = \varepsilon\varphi \widehat{E\hat{Z}\Delta},$$

οπότε

$$\widehat{AEB} = \widehat{E\hat{Z}\Delta} = \widehat{Z\hat{\Delta}E} - \widehat{Z\hat{E}\Delta} = 90^\circ - \widehat{Z\hat{E}\Delta}.$$

Άρα $\widehat{AEB} + \widehat{Z\hat{E}\Delta} = 90^\circ$, οπότε $\widehat{B\hat{E}Z} = 90^\circ$ όπως θέλαμε.

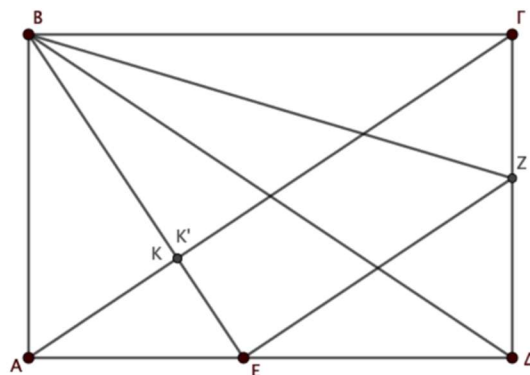


(2^{ος} τρόπος) Έστω σημείο K στην ΑΓ τέτοιο ώστε $EK \perp AG$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΕ, ΑΔΓ είναι όμοια, αφού έχουν κοινή την οξεία γωνία $\widehat{Γ\hat{A}\Delta}$. Έτσι,

$$\frac{AK}{AE} = \frac{AD}{AG},$$

και άρα:

$$AK \cdot AG = AD \cdot AE = AB^2.$$



Έστω σημείο K' στην ΑΓ τέτοιο ώστε $BK' \perp AG$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚ'Β και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε

$$AK' \cdot AG = AB^2 = AK \cdot AG.$$

Άρα τα σημεία K, K' ταυτίζονται, και η ευθεία BE είναι κάθετη στην ΑΓ στο K.

Αφού τα ορθογώνια τρίγωνα BAE και ΒΓΖ έχουν το ίδιο εμβαδό, ισχύει

$$\frac{1}{2} \cdot BA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot BG \cdot GZ,$$

δηλ. $BA \cdot AE = BG \cdot GZ$, ή ισοδύναμα,

$$\Delta\Gamma \cdot AE = \Delta A \cdot \Gamma Z$$

αφού $BA = \Delta\Gamma$ και $BG = \Delta A$. Τότε

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta A} = \frac{\Gamma Z}{AE} = \frac{\Delta\Gamma - \Gamma Z}{\Delta A - AE} = \frac{\Delta Z}{\Delta E},$$

που σημαίνει ότι $EZ \parallel AG$. Συνεπώς, $BE \perp EZ$, όπως θέλαμε.

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος μοίρασε διαδοχικά 150 μπίλιες σε 10 κουτιά $K_1, K_2, \dots, K_{10}$, με αυτή τη σειρά, στα οποία έβαλε $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ μπίλιες, αντίστοιχα, όπου $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ θετικοί ακέραιοι. Ξεκινώντας να βάζει μπίλιες από το κουτί K_1 , σε κάθε επόμενο κουτί έβαζε περισσότερες μπίλιες από το προηγούμενο. Αν ο αριθμός από μπίλιες που έβαλε στο πρώτο κουτί είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το μισό του αριθμού από μπίλιες που έβαλε στο δέκατο κουτί, να βρεθεί πόσες μπίλιες έβαλε στο έκτο κουτί.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος, έχουμε:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{10}, \quad a_1 + \dots + a_{10} = 150 \quad \text{και} \quad a_1 \geq \frac{1}{2} a_{10}.$$

Θέτουμε $a_1 = x$. Επειδή οι ποσότητες αυξάνονται αυστηρά έχουμε:

$$a_2 \geq x + 1, \quad a_3 \geq x + 2, \dots, \quad a_{10} \geq x + 9.$$

Επομένως, με πρόσθεση κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$a_1 + \dots + a_{10} \geq 10x + 45,$$

οπότε

$$10x + 45 \leq 150 \Leftrightarrow x \leq 10.$$

Επιπλέον, από τον περιορισμό $a_1 \geq \frac{1}{2}a_{10}$ έχουμε:

$$a_1 \geq \frac{1}{2}a_{10} \Leftrightarrow x \geq \frac{x+9}{2} \Leftrightarrow 2x \geq x+9 \Leftrightarrow x \geq 9.$$

Άρα είναι: $x = 9$ ή $x = 10$.

Αν $x = 9$, τότε $a_{10} = 18$ και η μοναδική αυστηρά αύξουσα δεκάδα είναι

$$9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,$$

που αθροίζει σε $135 \neq 150$, άτοπο.

Αν $x = 10$, Η ελάχιστη δεκάδα είναι 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, με άθροισμα 145.

Προσθέτοντας κατάλληλα παίρνουμε μία έγκυρη δεκάδα:

$$10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20 \text{ (άθροισμα 150)}.$$

Επομένως το έκτο κουτί έχει 16 μπίλιες.

(2^{ος} τρόπος). Αν $a_1 \geq 11$, τότε

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} \geq 11 + 12 + 13 + \dots + 20 = \frac{11 + 20}{2} \cdot 10 = 155 > 150,$$

άτοπο. Άρα $a_1 \leq 10$.

Αν $a_{10} \leq 19$, τότε

$$a_{10} + a_9 + a_8 + \dots + a_1 \leq 19 + 18 + 17 + \dots + 10 = \frac{19 + 10}{2} \cdot 10 = 145 < 150,$$

άτοπο. Άρα $a_{10} \geq 20$, και $a_1 \geq \frac{a_{10}}{2} \geq 10$. Συνεπώς, $a_1 = 10$ και $a_{10} = 20$.

Παρατηρούμε ότι $a_6 \geq a_1 + 5 = 15$, και $a_6 \leq a_{10} - 4 = 16$, οπότε: $a_6 = 15$ ή 16 .

Αν $a_6 = 15$, τότε

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{10 + 15}{2} \cdot 6 = 75,$$

οπότε

$$a_7 + a_8 + a_9 = 75 - a_{10} = 55,$$

ενώ

$$a_9 + a_8 + a_7 \leq 19 + 18 + 17 = 54,$$

άτοπο. Άρα $a_6 = 16$, με

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}) = (10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20).$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω $(a_n)_{n \geq 1}$ μία αριθμητική πρόοδος τέτοια ώστε $a_{m+n} = 103$ και $a_{m-n} = 49$, για κάποιους θετικούς ακέραιους $m > n$. Να βρεθεί η τιμή της διαφοράς $a_{na_m} - a_n$.

Λύση

Έστω ω η διαφορά της αριθμητικής προόδου. Τότε ισχύουν:

$$a_{m+n} = a_m + n\omega \quad (1) \quad \text{και} \quad a_{m-n} = a_m - n\omega \quad (2)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$a_m = \frac{a_{m+n} + a_{m-n}}{2} = \frac{103 + 49}{2} = 76 \quad \text{και} \quad n\omega = \frac{a_{m+n} - a_{m-n}}{2} = \frac{103 - 49}{2} = 27.$$

Επομένως, έχουμε:

$$a_{na_m} - a_n = a_{76n} - a_n = 75n\omega = 75 \cdot 27 = 2025.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y για τους οποίους ισχύει:

$$11x^2y^2 - y^4 - 25x^4 + 7 = 0$$

Λύση:

Έχουμε:

$$\begin{aligned} 25x^4 - 11x^2y^2 + y^4 &= 7 \Leftrightarrow 25x^4 - 10x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = 7 \Leftrightarrow \\ (5x^2 - y^2)^2 - x^2y^2 &= 7 \Leftrightarrow (5x^2 - y^2 + xy)(5x^2 - y^2 - xy) = 7. \end{aligned}$$

Επειδή ισχύει $5x^2 - y^2 + xy > 5x^2 - y^2 - xy$ και $7 = 7 \cdot 1 = (-1) \cdot (-7)$, έπεται ότι:

$$5x^2 - y^2 + xy = 7 \quad \text{και} \quad 5x^2 - y^2 - xy = 1 \quad (I)$$

ή

$$5x^2 - y^2 + xy = -1 \quad \text{και} \quad 5x^2 - y^2 - xy = -7 \quad (II)$$

Από την (I) με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$xy = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x} \quad (1)$$

οπότε:

$$5x^2 - y^2 = 4 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει:

$$5x^2 - \frac{9}{x^2} - 4 = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 4x^2 - 9 = 0.$$

Λύνοντας την εξίσωση ως προς x^2 λαμβάνουμε $x^2 = -1$, αδύνατο αφού $x^2 \geq 0$,

ή $x^2 = \frac{9}{5}$, αδύνατο, αφού x θετικός ακέραιος.

Από την (II) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$xy = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x} \quad (1)$$

οπότε:

$$5x^2 - y^2 = -4 \quad (3)$$

Από τις (1), (3) λαμβάνουμε:

$$5x^2 - \frac{9}{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow 5x^4 + 4x^2 - 9 = 0.$$

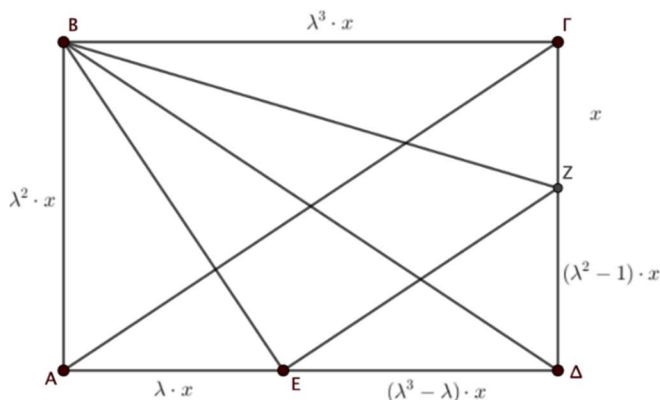
Λύνοντας την εξίσωση ως προς x^2 λαμβάνουμε $x^2 = 1$ ή $x^2 = -\frac{9}{5}$, αδύνατο, αφού $x^2 \geq 0$. Επομένως, αφού x θετικός ακέραιος, έχουμε τελικά τη λύση:

$$x = 1, \quad y = 3.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $B\Gamma = \lambda \cdot AB$, για κάποιο $\lambda > 1$, και σημεία Ε και Ζ στις πλευρές ΑΔ και ΓΔ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $EZ \parallel A\Gamma$, και $\widehat{B\hat{E}Z} = 90^\circ$. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών $\frac{(BEZ)}{(AB\Gamma\Delta)}$ συναρτήσει του λ .

Λύση



Έστω $\Gamma Z = x$. Αφού $EZ \parallel A\Gamma$, είναι

$$\frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{AE}{\Gamma Z} = \frac{A\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB} = \lambda,$$

οπότε $AE = \lambda x$. Αφού $\widehat{B\hat{E}Z} = 90^\circ$, οι γωνίες $\widehat{A\hat{E}B}$ και $\widehat{\Delta\hat{E}Z}$ είναι συμπληρωματικές, και άρα τα τρίγωνα $\triangle BAE$ και $\triangle EDZ$ είναι όμοια, και άρα

$$\frac{AB}{AE} = \frac{\Delta E}{\Delta Z} = \lambda.$$

Έτσι, είναι $AB = \lambda \cdot AE = \lambda^2 x$, και $A\Delta = B\Gamma = \lambda \cdot AB = \lambda^3 x$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$E\Delta = A\Delta - AE = \lambda^3 x - \lambda x = \lambda(\lambda^2 - 1)x$$

και

$$\Delta Z = \frac{\Delta E}{\lambda} = (\lambda^2 - 1)x.$$

(1^{ος} τρόπος) Για τα εμβαδά έχουμε

$$(AB\Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot AB = \lambda^3 x \cdot \lambda^2 x = \lambda^5 x^2,$$

$$(BAE) = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 x \cdot \lambda x = \frac{\lambda^3 x^2}{2} = \frac{1}{2\lambda^2} \cdot (AB\Gamma\Delta),$$

$$(Z\Delta E) = \frac{1}{2} \cdot E\Delta \cdot \Delta Z = \frac{1}{2} \cdot \lambda(\lambda^2 - 1)x \cdot (\lambda^2 - 1)x = \frac{\lambda(\lambda^2 - 1)^2 x^2}{2} = \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{2\lambda^4} \cdot (AB\Gamma\Delta),$$

και

$$(B\Gamma Z) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot \Gamma Z = \frac{1}{2} \cdot \lambda^3 x \cdot x = \frac{\lambda^3 x^2}{2} = (BAE).$$

Επομένως, έχουμε:

$$\begin{aligned}(BEZ) &= (AB\Gamma\Delta) - (Z\Delta E) - 2(BAE) = (AB\Gamma\Delta) - \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{2\lambda^4} \cdot (AB\Gamma\Delta) - \frac{1}{\lambda^2} \cdot (AB\Gamma\Delta) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \cdot (AB\Gamma\Delta).\end{aligned}$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος λόγος είναι ίσος με

$$\frac{(BEZ)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^4} \right).$$

(2^{ος} τρόπος) Έχουμε $(AB\Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot AB = \lambda^3 x \cdot \lambda^2 x = \lambda^5 x^2$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο BAE έχουμε

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = \lambda^4 x^2 + \lambda^2 x^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 1)x^2.$$

Επίσης, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $Z\Delta E$ έχουμε

$$EZ^2 = E\Delta^2 + \Delta Z^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 1)^2 x^2 + (\lambda^2 - 1)^2 x^2 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)^2 x^2,$$

οπότε

$$(BEZ)^2 = \frac{BE^2 \cdot EZ^2}{4} = \frac{\lambda^2(\lambda^2 + 1)x^2 \cdot (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)^2 x^2}{4} = \left(\frac{\lambda(\lambda^4 - 1)}{2} x^2 \right)^2.$$

Αφού $\lambda > 1$, $\lambda(\lambda^4 - 1) > 0$, έπεται ότι:

$$(BEZ) = \frac{\lambda(\lambda^4 - 1)}{2} x^2 = \frac{\lambda^4 - 1}{2\lambda^4} \cdot (AB\Gamma\Delta),$$

απ' όπου έπεται το αποτέλεσμα.

(3^{ος} τρόπος) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x = 1$. Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με $A(0,0)$, $B(0,\lambda^2)$, $\Gamma(\lambda^3,\lambda^2)$, $E(\lambda,0)$, και $Z(\lambda^3,\lambda^2 - 1)$, αφού $\Gamma Z = 1$. Τότε έχουμε:

$$\overrightarrow{BE} = (\lambda, -\lambda^2), \overrightarrow{EZ} = (\lambda^3 - \lambda, \lambda^2 - 1) \text{ και}$$

$$\det(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EZ}) = \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda^2 \\ \lambda^3 - \lambda & \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 1) + \lambda^2(\lambda^3 - \lambda) = \lambda^5 - \lambda = \lambda(\lambda^4 - 1) > 0,$$

οπότε

$$(BEZ) = \frac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EZ})| = \frac{\lambda(\lambda^4 - 1)}{2} = \frac{\lambda^4 - 1}{2\lambda^4} \cdot (AB\Gamma\Delta),$$

απ' όπου έπεται το αποτέλεσμα.