

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

41^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
24 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1 (Α) Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ ισχύει:

$$(\kappa + \lambda + \mu)^2 \geq 3(\kappa\lambda + \lambda\mu + \mu\kappa).$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(Β) Αν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και α, β πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\alpha(x + y + z) = \beta(xy + yz + zx) = xyz,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha \geq 3\beta^2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση (Α) Κάνοντας πράξεις βλέπουμε ότι η προς απόδειξη βοηθητική ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + 2\kappa\lambda + 2\lambda\mu + 2\mu\kappa \geq 3\kappa\lambda + 3\lambda\mu + 3\mu\kappa,$$

ή, ισοδύναμα με την

$$\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 - \kappa\lambda - \lambda\mu - \mu\kappa \geq 0.$$

Η τελευταία είναι ισοδύναμη με την

$$(\kappa - \lambda)^2 + (\lambda - \mu)^2 + (\mu - \kappa)^2 \geq 0,$$

που ισχύει για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ , με την ισότητα να αληθεύει αν και μόνο αν $\kappa = \lambda = \mu$. ■

(Β) (1^{ος} τρόπος)

Από την δοθείσα σχέση παίρνουμε ότι:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \text{ και } \frac{1}{\beta} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι $\alpha, \beta > 0$ και από τη βοηθητική ανισότητα θέτοντας

$$\kappa = \frac{1}{x}, \lambda = \frac{1}{y} \text{ και } \mu = \frac{1}{z}$$

παίρνουμε

$$\frac{1}{\beta^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2 \geq 3 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) = \frac{3}{\alpha}.$$

Από την τελευταία παίρνουμε $\alpha \geq 3\beta^2$, που είναι το ζητούμενο. Η ισότητα αληθεύει αν και μόνο αν $x = y = z$.

(2ος τρόπος) Λύνοντας τις δοθείσες εξισώσεις ως προς α και β παίρνουμε

$$\alpha = \frac{xyz}{x+y+z} \text{ και } \beta = \frac{xyz}{xy+yz+zx}.$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$\frac{xyz}{x+y+z} \geq 3 \left(\frac{xyz}{xy+yz+zx} \right)^2,$$

ή ισοδύναμα, μετά από απαλοιφή των παρονομαστών, αφού $x, y, z > 0$, ότι

$$(xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x + y + z).$$

Η τελευταία έπεται από την βοηθητική ανισότητα με $\kappa = xy, \lambda = yz$ και $\mu = zx$.

Η ισότητα αληθεύει, αν, και μόνο αν, $xy = yz = zx$ ή ισοδύναμα: $x = y = z$.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τον περιγεγραμμένο κύκλο του ω . Με κέντρο το σημείο A γράφουμε κύκλο γ που τέμνει το τόξο AB του κύκλου ω , που δεν περιέχει το Γ , στο σημείο Δ και το τόξο $A\Gamma$, που δεν περιέχει το B , στο σημείο E . Υποθέτουμε ότι το σημείο τομής K των ευθειών BE και $\Gamma\Delta$ ανήκει στον κύκλο γ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία AK είναι κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$.

Λύση (1ος τρόπος)

Από τη σχέση επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνουν στο τόξο ΔK του κύκλου γ , έχουμε:

$$\widehat{\Delta AK} = 2 \cdot \widehat{\Delta EK} \quad (1)$$

Από ισότητα εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στο τόξο $B\Delta$ του κύκλου ω έχουμε:

$$\widehat{\Delta EK} = \widehat{\Delta AB} \quad (2)$$

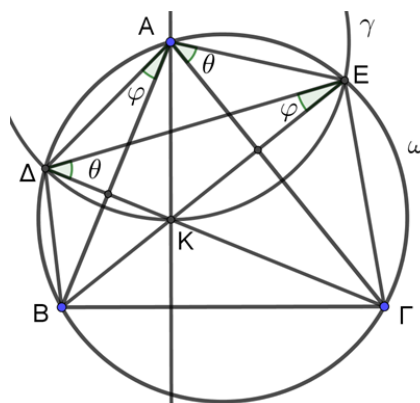
Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$\widehat{\Delta AK} = 2 \cdot \widehat{\Delta AB},$$

οπότε η ευθεία AB είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta AK}$.

Επειδή $AD = AK$, ως ακτίνες του κύκλου γ , το τρίγωνο ΔAK είναι ισοσκελές, οπότε θα είναι $AB \perp DK$, δηλαδή

$AB \perp \Gamma\Delta$. Ομοίως προκύπτει και ότι $A\Gamma \perp BE$. Άρα το σημείο K είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε $AK \perp B\Gamma$.



(2^{ος} τρόπος) Από το εγγεγραμμένο πεντάγωνο ΒΔΑΕΓ, βλέπουμε ότι $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{B\epsilon\Gamma} = \widehat{B\Lambda\Gamma}$ (1).

Επίσης, αφού το τρίγωνο ΔΑΚ είναι ισοσκελές, έχουμε $\widehat{AK\Delta} = \widehat{A\Delta K} = \widehat{AB\Gamma}$. Ομοίως, αφού το τρίγωνο ΕΑΚ είναι ισοσκελές, έχουμε $\widehat{AK\epsilon} = \widehat{A\epsilon K} = \widehat{A\Gamma B}$.

Συνεπώς, $\widehat{\Delta K\epsilon} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B}$, οπότε

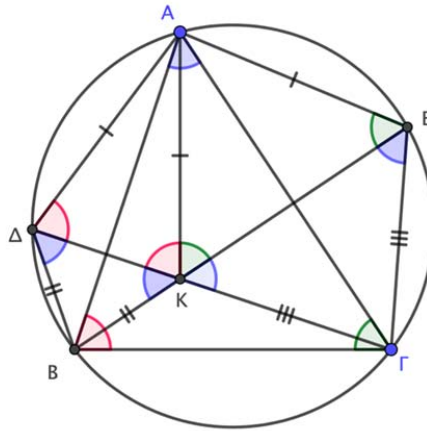
$$\widehat{\Delta K B} = \widehat{\epsilon K \Gamma} = 180^\circ - \widehat{\Delta K \epsilon} = 180^\circ - \widehat{AB\Gamma} - \widehat{A\Gamma B} = \widehat{B\Lambda\Gamma} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $B\Delta = BK$. Αφού $A\Delta = AK$ και $B\Delta = BK$, τα σημεία Α, Β ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ΔΚ, οπότε η ευθεία ΑΒ είναι η μεσοκάθετος του ΔΚ.

Συνεπώς,

$$\widehat{B\Lambda K} = 90^\circ - \widehat{AK\Delta} = 90^\circ - \widehat{AB\Gamma},$$

οπότε η ευθεία ΑΚ είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.



Πρόβλημα 3

Να εξετάσετε αν μπορούμε να τοποθετήσουμε τους δεκαέξι θετικούς διαιρέτες του 2024 στα κελιά του διπλανού πίνακα έτσι ώστε το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών μιας οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης να είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

Ναι, μπορούμε. Οι διαιρέτες του $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ είναι οι δεκαέξι αριθμοί

1, 2, 4, 8, 11, 22, 23, 44, 46, 88, 92, 184, 253, 506, 1012, 2024.

Κανείς τους δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες, αυτούς που αφήνουν υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθούν με το 3:

1, 4, 22, 46, 88, 184, 253, 1012,

και σε αυτούς που αφήνουν υπόλοιπο 2 όταν διαιρεθούν με το 3:

2, 8, 11, 23, 44, 92, 506, 2024.

Κάθε ομάδα αποτελείται από οκτώ αριθμούς. Επίσης, παρατηρούμε ότι μια στήλη ή μια γραμμή του τετραγωνικού πλέγματος μπορεί να έχει άθροισμα το οποίο να είναι πολλαπλάσιο του 3 αν και μόνο αν περιέχει δύο αριθμούς της πρώτης ομάδας και δύο αριθμούς της δεύτερης ομάδας.

Ας επιλέξουμε από κάθε στήλη και κάθε γραμμή του πλέγματος ακριβώς δύο κελιά για να τοποθετήσουμε τους οκτώ αριθμούς της πρώτης ομάδας. (Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε με $6 \cdot 6 = 36$ τρόπους). Μια τέτοια επιλογή είναι, για παράδειγμα, η εξής:

1			4
22			46
	88	184	
	253	1012	

Στη συνέχεια ας τοποθετήσουμε τους αριθμούς της δεύτερης ομάδας στα κενά κελιά του πλέγματος, έναν σε κάθε κελί και με όποια σειρά θέλουμε. Για παράδειγμα, μια ολοκληρωμένη επιλογή είναι η εξής:

1	2	8	4
22	11	23	46
44	88	184	92
506	253	1012	2024

Στον τελικό πίνακα παρατηρούμε ότι το άθροισμα των αριθμών μιας οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης να είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4

Ναδειχθεί ότι υπάρχουν άπειρες τριάδες θετικών ακέραιων αριθμών (x, y, z) τέτοιες ώστε

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 6xyz.$$

Λύση. Γράφοντας της δοθείσα σχέση ως

$$x^2 + y^2 + xy = (6xy - x - y - z)z$$

βλέπουμε ότι αντικαθιστώντας το z με το $6xy - x - y - z$, το δεξί μέλος παραμένει αναλλοίωτο. Έτσι, αν (x, y, z) είναι λύση της (1) με $x > y > z$, τότε λύση της είναι και η

$(6xy - x - y - z, x, y)$ με $6xy - x - y - z > x > y$, αφού

$$(6xy - x - y - z) - x = \frac{x^2 + y^2 + xy}{z} - x = \frac{x(x - z) + y^2 + xy}{z} > 0.$$

Παρατηρώντας ότι η $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ είναι λύση της (1) παίρνουμε την $(x, y, z) = (3, 1, 1)$, η οποία με τη σειρά της δίνει την $(x, y, z) = (13, 3, 1)$ (με $13 > 3 > 1$).

Συμπεραίνουμε ότι η (1) έχει άπειρες ακέραιες λύσεις (x, y, z) με $x > y > z > 0$

41η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
24 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2024

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν οι a, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε δύο από αυτούς να έχουν διαφορά μεγαλύτερη του $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραιος αριθμός x , ώστε

$$x^2 - 4(a + b + c)x + 12(ab + bc + ca) < 0.$$

Λύση (1ος τρόπος) Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = 16(a + b + c)^2 - 48(ab + bc + ca) = 8((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2).$$

Αφού δύο από τους αριθμούς απέχουν τουλάχιστον $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, το τετράγωνο της διαφοράς τους θα είναι μεγαλύτερο του $1/8$, άρα $\Delta > 1$. Αφού η διακρίνουσα είναι θετική, το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες, έστω $\rho_1 > \rho_2$ μεταξύ των οποίων το πρόσημο του τριωνύμου είναι αρνητικό. Επιπλέον, έχουμε:

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{4(a + b + c) + \sqrt{\Delta}}{2} - \frac{4(a + b + c) - \sqrt{\Delta}}{2} = \sqrt{\Delta} > 1,$$

οπότε μεταξύ των ρ_1, ρ_2 υπάρχει ακέραιος, έστω x , ο οποίος κάνει το δεδομένο τριώνυμο αρνητικό σύμφωνα με τα παραπάνω.

(2ος τρόπος) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4(a + b + c)x + 12(ab + bc + ca) = x(x - 4(a + b + c)) + 12(ab + bc + ca).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f(2(a + b + c)) &= -4(a + b + c)^2 + 12(ab + bc + ca) \\ &= -2((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2) < 0. \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή, η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω και έχει άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία $x = 2(a + b + c)$. Έτσι, ισχύει

$$f(2(a + b + c) + \frac{1}{2}) = f(2(a + b + c) - \frac{1}{2}).$$

Κάνοντας πράξεις, έχουμε

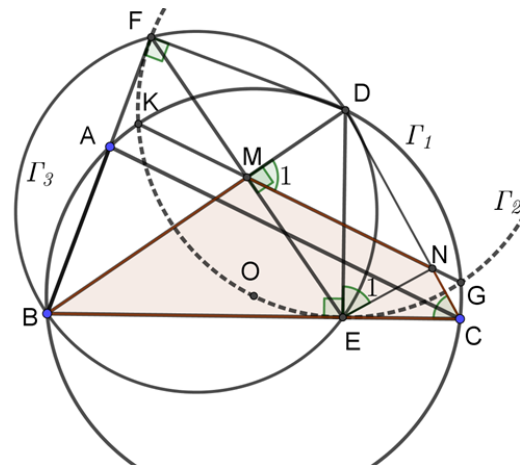
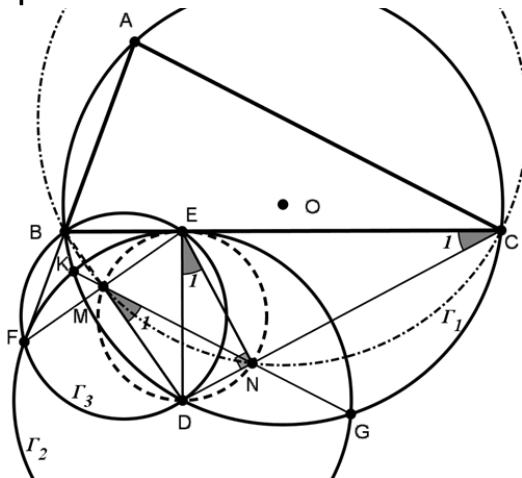
$$\begin{aligned}
f\left(2(a+b+c) + \frac{1}{2}\right) &= 2(a+b+c) + \frac{1}{2}(-2(a+b+c) + \frac{1}{2}) + 12(ab+bc+ca) \\
&= \frac{1}{4} - 4(a+b+c)^2 + 12(ab+bc+ca) \\
&= \frac{1}{4} - 2((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \\
&= \frac{1 - 8((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)}{4} < 0,
\end{aligned}$$

αφού $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{8}$, από την υπόθεση. Έτσι, το τριώνυμο διατηρεί αρνητικό πρόσημο στο διάστημα $\left[2(a+b+c) - \frac{1}{2}, 2(a+b+c) + \frac{1}{2}\right]$, το οποίο έχει μήκος 1. Συνεπώς, υπάρχει κάποιος ακέραιος σε αυτό το διάστημα για τον οποίο ικανοποιείται το ζητούμενο.

Πρόβλημα 2

Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$, εγγεγραμμένο σε κύκλο Γ_1 με κέντρο το σημείο O . Θεωρούμε το κύκλο Γ_2 που έχει κέντρο σημείο D , που ανήκει στον κύκλο Γ_1 , και εφάπτεται στη πλευρά BC στο σημείο E και στη προέκταση της πλευράς AB στο σημείο F . Οι κύκλοι Γ_1 και Γ_2 τέμνονται στα σημεία K και G (το σημείο K βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου BFE). Αν η ευθεία KG τέμνει τις ευθείες FE και CD στα σημεία M και N , αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BCNM$ είναι εγγράψιμο.

Λύση



Ισχύουν οι καθετότητες $DE \perp BC$ και $DF \perp AB$ (διότι ο κύκλος Γ_2 εφάπτεται στη πλευρά BC στο σημείο E και στη προέκταση της πλευράς AB στο σημείο F).

Άρα το τετράπλευρο $BEDF$ είναι εγγράψιμο (σε κύκλο έστω Γ_3) και ισχύουν οι ισότητες τμημάτων:

$$BE = BF \text{ και } DE = DF \quad (1)$$

Η EF είναι η κοινή χορδή των κύκλων Γ_2 και Γ_3 και η KG είναι η κοινή χορδή των κύκλων Γ_1 και Γ_2 . Οι δύο παραπάνω χορδές τέμνονται (σύμφωνα με την εκφώνηση) στο σημείο M και επειδή η BD είναι η κοινή χορδή των κύκλων Γ_1 και Γ_3 , η BD θα διέρχεται από το σημείο M (ριζικό κέντρο των τριών κύκλων $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$).

1ος τρόπος: Τα ορθογώνια τρίγωνα AFD, CED είναι ίσα καθώς έχουν $FD = ED$, και $\widehat{FAD} = \widehat{ECD}$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο), άρα $DA = DC$. Έπεται ότι η DO είναι μεσοκάθετη της AC, και αφού $DO \perp KG$, έπεται ότι $AC \parallel KG$. (*) Αφού η BD διχοτομεί την $\widehat{FBE}$ και το BDCA είναι εγγεγραμμένο στον Γ_1 έχουμε $\widehat{MBC} = \widehat{FBM} = \widehat{ACD} = \widehat{MND}$ (όπου η τελευταία προκύπτει από την (*)), οπότε BCNM εγγράψιμο.

2ος τρόπος: Η BD είναι η μεσοκάθετος της EF (από τις σχέσεις (1)) και κατά συνέπεια:

$$\widehat{DME} = 90^\circ \quad (2).$$

Από το κύκλο Γ_1 έχουμε:

$$NC \cdot ND = NG \cdot NK.$$

Το γινόμενο όμως $NG \cdot NK$ εκφράζει τη δύναμη του σημείου N ως προς το κύκλο Γ_2 , και άρα

$$NG \cdot NK = DE^2 - DN^2.$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε:

$$NC \cdot ND = DE^2 - DN^2 \quad (3).$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο DCE (σε συνδυασμό με την σχέση (3)) συμπεραίνουμε ότι το NE είναι ύψος του τριγώνου (*) και κατά συνέπεια:

$$\widehat{DNE} = 90^\circ \quad (4).$$

Από τις σχέσεις (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο DMEN είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια $\widehat{M}_1 = \widehat{E}_1$.

Από τα ορθογώνια τρίγωνα DNE και CDE έχουμε: $\widehat{C}_1 = \widehat{E}_1$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο BCNM είναι εγγράψιμο.

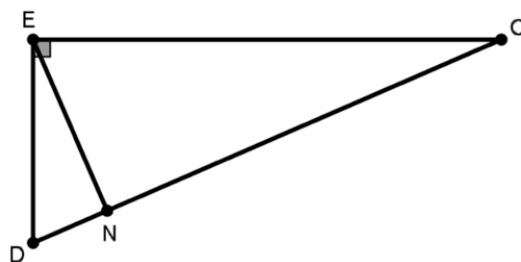
$$(*) \quad NC \cdot ND = DE^2 - DN^2 \quad (3).$$

$$NC \cdot ND = DE^2 - DN^2$$

$$\Leftrightarrow (CD - ND) \cdot ND = DE^2 - DN^2$$

$$\Leftrightarrow DC \cdot DN - DN^2 = DE^2 - DN^2$$

$$\Leftrightarrow DC \cdot DN = DE^2 \Leftrightarrow \frac{DE}{DC} = \frac{DN}{DE}$$



Από την τελευταία αναλογία συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα DNE και DEC είναι όμοια.

3ος τρόπος: Ισχύουν οι καθετότητες $DE \perp BC$ και $DF \perp AB$ (διότι ο κύκλος Γ_2 εφάπτεται στη πλευρά BC στο σημείο E και στη προέκταση της πλευράς AB στο σημείο F). Άρα το τετράπλευρο BEDF είναι εγγράψιμο (σε κύκλο έστω Γ_3).

Θεωρούμε την αντιστροφή ως προς τον κύκλο Γ_2 (με κέντρο D). Εφόσον ο κύκλος Γ_3 περνά από το D, γίνεται ευθεία, η κοινή τους χορδή FE, επομένως η εικόνα του B ανήκει στην ευθεία FE. (5)

Εφόσον ο κύκλος Γ_1 περνά από γίνεται ευθεία, η κοινή τους χορδή KG, επομένως η εικόνα του B ανήκει και στην KG. (6)

Από τις (5), (6) συμπεραίνουμε ότι η εικόνα του B μέσω της αντιστροφής είναι το σημείο M. Τέλος, το σημείο C πηγαίνει στο σημείο N. Επομένως το τετράπλευρο BMNC είναι εγγράψιμο.

Πρόβλημα 3

Έστω $n \geq 2$ ένας ακέραιος. Θεωρούμε δύο πεπερασμένα υποσύνολα A, B των ακεραίων αριθμών, ώστε το σύνολο A να έχει το πολύ n στοιχεία και έστω Γ ένα υποσύνολο του συνόλου $\{(\alpha, \beta) : \alpha \in A, \beta \in B\}$. Ο Αχιλλέας γράφει σε ένα πίνακα όλες τις δυνατές διαφορές $\alpha - \beta$, με $(\alpha, \beta) \in \Gamma$. Έστω d το πλήθος όλων αυτών των διαφορών. Στη συνέχεια ο Αχιλλέας καταγράφει σε ένα άλλο πίνακα όλες τις τριάδες (κ, λ, μ) με $(\kappa, \lambda) \in \Gamma, (\kappa, \mu) \in \Gamma$. Έστω p το πλήθος όλων αυτών των τριάδων. Να αποδείξετε ότι: $n \cdot p \geq d^2$.

Λύση

Για ένα σύνολο X , θα συμβολίζουμε με $|X|$, το πλήθος των στοιχείων του. Το πλήθος των δυνατών διαφορών $\alpha - \beta$, με $(\alpha, \beta) \in \Gamma$, είναι το πολύ όσο το πλήθος των στοιχείων του Γ , δηλαδή

$$d \leq |\Gamma| \quad (*)$$

Έστω $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ και για κάθε i , υποθετούμε ότι υπάρχουν b_i ζεύγη $(a_i, b) \in \Gamma$. Τότε υπάρχουν b_i^2 τριάδες (a_i, λ, μ) με $(a_i, \lambda) \in \Gamma, (a_i, \mu) \in \Gamma$.

Συνεπώς, υπάρχουν συνολικά $p = b_1^2 + \dots + b_m^2$ τριάδες (κ, λ, μ) με $(\kappa, \lambda) \in \Gamma, (\kappa, \mu) \in \Gamma$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι

$$m(b_1^2 + \dots + b_m^2) \geq (b_1 + \dots + b_m)^2 \quad (1)$$

Το αριστερό μέλος είναι ίσο με $|A| \cdot p$, ενώ το δεξί μέλος είναι ίσο με $|\Gamma|^2$. Όμως, από την εκφώνηση έχουμε $|A| \leq n$, επομένως η (1) δίνει:

$$n \cdot p \geq |\Gamma|^2 \geq d^2,$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την (*).

Πρόβλημα 4

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακέραιος $n \geq 1$, τέτοιος ώστε το πλήθος όλων των ζευγών (a, b) θετικών ακέραιων αριθμών με

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n}$$

να είναι μεγαλύτερο του 2024.

Λύση (1ος τρόπος) Αναζητούμε λύσεις (a, b) με $a - b = kb$, δηλ. $a = (k + 1)b$ για κάποιο ακέραιο $k > 0$. Τότε η παράσταση στο αριστερό μέλος της δοθείσας εξίσωσης είναι ίση με

$$\frac{1}{kb} - \frac{1}{(k+1)b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + 1 \right) = \frac{1}{b} \cdot \frac{k(k+1) + 1}{k(k+1)}$$

οπότε έχουμε

$$b = \frac{(k(k+1) + 1)n}{k(k+1)} = n + \frac{n}{k(k+1)}$$

Αρκεί, λοιπόν, να επιλέξουμε ως n έναν θετικό ακέραιο ο οποίος έχει περισσότερους από 2024 διαιρέτες της μορφής $k(k+1)$. Πράγματι, για παράδειγμα, αν (p_n) είναι η ακολουθία των πρώτων με $p_1=2, p_2=3, \dots$, τότε ο αριθμός

$$n = p_1(p_1+1) p_2 (p_2+1) \cdots p_{2025} (p_{2025} + 1),$$

ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.

(2ος τρόπος) Η εξίσωση γράφεται ως

$$\frac{a^2 - ab + b^2}{ab(a-b)} = \frac{1}{n}$$

Θέτουμε $d = (a, b)$, οπότε $a = dx, b = dy$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{xy(x-y)}{x^2 - xy + y^2} = \frac{n}{d}$$

Αν $(n, d) = S$, τότε $n = Su$ και $d = Sv$. Για να ισχύει η τελευταία είναι πρέπει να έχουμε

$xy(x-y) = u$ και $x^2 - xy + y^2 = v$. Αν θέσουμε $xy = s$ και $x-y = t$, τότε οι δύο σχέσεις γίνονται $st = u$ και $t^2 - 3s = v$. Τότε $x = \frac{s}{y}$ και $\frac{s}{y} - y = t \Leftrightarrow y^2 + yt - s = 0$.

Η διακρίνουσα της τελευταίας είναι $\Delta = t^2 + 4s$. Ένας τρόπος για να έχει ακέραια λύση η εξίσωση είναι να πάρουμε $s = k(t+k)$ για κάποιον θετικό ακέραιο k και τότε η εξίσωση έχει λύση την $y = k$. Σε αυτή την περίπτωση $x = k+t$, οπότε

$$u = st = kt(k+t)$$

και $v = t^2 - 3k(t+k)$. Πρέπει $v > 0$ (ένας τρόπος είναι να επιλέξουμε $k = 1$ και $t \geq 4$).

Η κατασκευή τώρα γίνεται ως εξής: Επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο n που έχει 2024 διαιρέτες u της μορφής $kt(k+t)$. Για κάθε έναν από αυτούς, σύμφωνα με τα παραπάνω, προσδιορίζεται μια τριάδα x, y, v ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση. Από αυτή την τριάδα προσδιορίζεται ένα ζεύγος (a, b) που ικανοποιεί την εξίσωση.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

42^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2025

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Δίνεται ότι οι αριθμοί m, n είναι θετικοί ακέραιοι και ότι το σύστημα

$$mx + 3y = m,$$

$$2x + ny = n,$$

με αγνώστους $x, y \in \mathbb{R}$ δεν έχει λύσεις. Να βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη (m, n) .

Λύση

Επειδή $m \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx + 3y = m \\ 2x + ny = n \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m - 3y}{m} \\ x = \frac{n - ny}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n - ny}{2} = \frac{m - 3y}{m} \\ x = \frac{n - ny}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} mn - mny = 2m - 6y \\ x = \frac{n - ny}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (6 - mn)y = 2m - mn \\ x = \frac{n - ny}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Επειδή από την υπόθεση το σύστημα δεν έχει λύσεις, έπεται ότι η εξίσωση

$$(6 - mn)y = 2m - mn \text{ είναι αδύνατη} \Leftrightarrow 6 - mn = 0 \text{ και } m(2 - n) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (m, n) = (2, 3) \text{ ή } (m, n) = (1, 6) \text{ ή } (m, n) = (6, 1),$$

αφού οι αριθμοί m, n είναι θετικοί ακέραιοι.**2^{ος} τρόπος.** Αν υποθέσουμε ότι το δοθέν σύστημα έχει λύσεις, τότε θα έχει λύσεις και το σύστημα που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με το 2 και τη δεύτερη με το $-m$:

$$\begin{cases} 2mx + 6y = 2m \\ -2mx - mny = -mn \end{cases}$$

Τότε με πρόσθεση κατά μέλη, θα έχει λύση ως προς y και η εξίσωση

$$(6 - mn)y = m(2 - n).$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος με το n και τη δεύτερη με το -3 παίρνουμε

$$\begin{cases} nm x + 3ny = mn \\ -6x - 3ny = -3n \end{cases}$$

Τότε με πρόσθεση κατά μέλη, θα έχει λύση ως προς x και η εξίσωση

$$(6 - mn)x = n(3 - m).$$

Αν $mn \neq 6$, τότε όπως είναι φανερό από τις παραπάνω εξισώσεις το σύστημα έχει λύση, άτοπο. Άρα πρέπει $mn = 6$ και $(m, n) \neq (3, 2)$, αφού αλλιώς το σύστημα θα είχε άπειρες το πλήθος λύσεις $(x, y) = (k, 1 - k)$, με k πραγματικό αριθμό. Συνεπώς, τα ζητούμενα δυνατά ζεύγη είναι τα $(m, n) = (2, 3), (6, 1)$ και $(1, 6)$.

3ος τρόπος. Με τη μέθοδο των οριζουσών έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & n \end{vmatrix} = mn - 6, D_x = \begin{vmatrix} m & 3 \\ n & n \end{vmatrix} = mn - 3n, \quad D_y = \begin{vmatrix} m & m \\ 2 & n \end{vmatrix} = mn - 2m.$$

Το σύστημα δεν έχει λύσεις, αν, και μόνον αν,

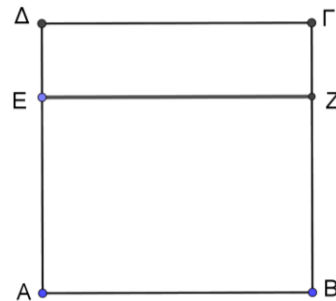
$$D = 0 \text{ και } (D_x \neq 0 \text{ ή } D_y \neq 0) \Leftrightarrow mn - 6 \text{ και } (n(m - 3) \neq 0 \text{ ή } m(n - 2) \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (m, n) = (2, 3) \text{ ή } (m, n) = (1, 6) \text{ ή } (m, n) = (6, 1),$$

αφού οι αριθμοί m, n είναι θετικοί ακέραιοι.

Πρόβλημα 2

Το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος υποδιαιρείται με το τμήμα EZ σε δύο ορθογώνια $ABZE$ και $EZ\Gamma\Delta$. Δίνεται ότι $AE > E\Delta$. Τα μήκη όλων των πλευρών των δύο ορθογωνίων είναι θετικοί ακέραιοι. Αν η διαφορά των εμβαδών των δύο ορθογωνίων είναι 24, να προσδιορίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



Λύση (1ος τρόπος)

Έστω x η πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ και $AE = y < x$, οπότε $E\Delta = x - y > 0$, όπου οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι. Τότε

$$E(ABZE) = xy \text{ και } E(EZ\Gamma\Delta) = x(x - y),$$

οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$xy - x(x - y) = 24 \Leftrightarrow 2xy - x^2 = 24 \Leftrightarrow x(2y - x) = 24.$$

Επειδή ο x είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι και $2y - x > 0 \Leftrightarrow x < 2y$, οπότε έχουμε τον περιορισμό $y < x < 2y$. Επίσης, έχουμε

$$y > 2y - x \Leftrightarrow x > y, \text{ που ισχύει.}$$

Συνοψίζοντας έχουμε τους περιορισμούς: $2y - x < y < x < 2y$.

Τότε από την εξίσωση $x(2y - x) = 24$ προκύπτουν οι λύσεις:

- $(x, 2y - x) = (6, 4) \Leftrightarrow x = 6, 2y = 10 \Leftrightarrow x = 6, y = 5$
- $(x, 2y - x) = (8, 3) \Leftrightarrow x = 8, 2y = 11$, απορρίπτεται
- $(x, 2y - x) = (12, 2) \Leftrightarrow x = 12, 2y = 14 \Leftrightarrow x = 12, y = 7$,
- $(x, 2y - x) = (24, 1) \Leftrightarrow x = 24, 2y = 25$, απορρίπτεται

Άρα οι δυνατές τιμές του εμβαδού του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι 36 ή 144.

2ος τρόπος. Έστω $(AB) = x$ και $(AE) = y < x$, όπου οι x, y είναι θετικοί ακέραιοι. Τότε $(ABZE) = xy$ και $(EZ\Gamma\Delta) = x(x - y) = x^2 - xy$. Δίνεται ότι $y = AE > E\Delta = x - y$, οπότε

(ABZE) > (EZΓΔ). Έτσι, έχουμε την εξίσωση $xy - (x^2 - xy) = 24$, η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$x^2 - 2xy + 24 = 0.$$

Για να έχει η παραπάνω εξίσωση ακέραιες λύσεις ως προς x , πρέπει η διακρίνουσα της $\Delta = 4y^2 - 96$ να είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή, πρέπει να υπάρχει θετικός ακέραιος z τέτοιος ώστε $4y^2 - 96 = z^2$. Τότε παίρνουμε

$$(2y + z)(2y - z) = 96.$$

Τα ζευγάρια (δ_1, δ_2) των διαιρετών του 96 με $\delta_1 > \delta_2 > 0$ και $\delta_1 \delta_2 = 96$ είναι τα $(96, 1), (48, 2), (32, 3), (24, 4), (16, 6)$, και $(12, 8)$. Από αυτά, τα ζευγάρια με άθροισμα πολλαπλάσιο του 4 είναι μόνο το $(24, 4)$ και το $(12, 8)$. Έτσι, είναι:

$$2y + z = 24 \text{ και } 2y - z = 4 \text{ ή } 2y + z = 12 \text{ και } 2y - z = 8.$$

Η πρώτη περίπτωση δίνει $(y, z) = (7, 10)$, και η εξίσωση γίνεται $x^2 - 14x + 24 = 0$ με λύσεις $x = 2$ και $x = 12$. Η λύση $x = 2$ απορρίπτεται, αφού πρέπει $x > y$, ενώ η δεύτερη γίνεται δεκτή, οπότε το εμβαδό του $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσο με $12^2 = 144$ τετραγωνικές μονάδες. Ομοίως, η δεύτερη περίπτωση δίνει $(y, z) = (5, 2)$, η εξίσωση γίνεται $x^2 - 10x + 24 = 0$ με λύσεις $x = 4$ και $x = 6$, από τις οποίες γίνεται δεκτή μόνο η δεύτερη, αφού πρέπει $x > y$. Τότε το εμβαδό του $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσο με $6^2 = 36$ τετραγωνικές μονάδες.

Πρόβλημα 3. Να αποδείξετε ότι, για οποιουδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha + \beta = 1$, ισχύει ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} + \alpha\beta \geq \frac{5}{4}.$$

Λύση. (1^{ος} τρόπος)

Πολλαπλασιάζοντας με $\alpha\beta > 0$, βλέπουμε ότι η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2\beta^2 \geq \frac{5}{4}\alpha\beta.$$

Είναι $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1 - 3\alpha\beta$, οπότε η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$1 - 3\alpha\beta + \alpha^2\beta^2 \geq \frac{5}{4}\alpha\beta,$$

η οποία γράφεται

$$4\alpha^2\beta^2 - 17\alpha\beta + 4 \geq 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$(4\alpha\beta - 1)(\alpha\beta - 4) \geq 0.$$

Η τελευταία ισχύει, αφού

$$4\alpha\beta \leq (\alpha + \beta)^2 = 1,$$

Οπότε $4\alpha\beta - 1 \leq 0$ και $\alpha\beta \leq \frac{1}{4} < 4$.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

(2^{ος} τρόπος) Παρατηρούμε ότι αφού $\alpha + \beta = 1$, ισχύει

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta} = -3,$$

(η οποία μπορεί να αποδειχθεί με διάφορους τρόπους). Έτσι, η δοθείσα ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} \geq 3 + \frac{5}{4} = \frac{17}{4}.$$

Την τελευταία μπορούμε να την αποδείξουμε με διάφορους τρόπους:

1. Αφού $(4\alpha\beta - 1)^2 \geq 0$, είναι $16\alpha^2\beta^2 - 8\alpha\beta + 1 \geq 0$, και $\alpha^2\beta^2 + 1 \geq 8\alpha\beta - 15\alpha^2\beta^2$.
Διαιρώντας με το $\alpha\beta > 0$, παίρνουμε

$$\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} \geq 8 - 15\alpha\beta \geq 8 - 15 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{4},$$

αφού $\alpha\beta \leq \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} = \frac{1}{4}$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

2. Από την ανισότητα Αριθμητικού Μέσου-Γεωμετρικού Μέσου

$$\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} = \left(\alpha\beta + \frac{1}{16\alpha\beta}\right) + \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{4\alpha\beta} \geq 2\sqrt{\alpha\beta \cdot \frac{1}{16\alpha\beta}} + \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{2}{4} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

3ος τρόπος. Η δοθείσα ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} + \beta + \alpha\beta \geq \frac{5}{4} + 1,$$

δηλαδή με την

$$\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\beta} + \frac{\beta(\alpha+\beta)}{\alpha} + \alpha\beta \geq \frac{9}{4},$$

η οποία γράφεται

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \alpha\beta \geq \frac{9}{4}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\alpha\beta > 0$, η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2\beta^2 \geq \frac{9}{4}\alpha\beta.$$

Επειδή $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 - 2\alpha\beta$, η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με

$$1 - 2\alpha\beta + \alpha^2\beta^2 \geq \frac{9}{4}\alpha\beta,$$

η οποία γράφεται

$$4\alpha^2\beta^2 - 17\alpha\beta + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (4\alpha\beta - 1)(\alpha\beta - 4) \geq 0.$$

Η τελευταία ισχύει, αφού

$$4\alpha\beta \leq (\alpha + \beta)^2 = 1,$$

οπότε $4\alpha\beta - 1 \leq 0$ και $\alpha\beta \leq \frac{1}{4} < 4$.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Πρόβλημα 4. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στη διαγώνιο του ΑΓ τέτοιο, ώστε $\widehat{B\hat{E}\Gamma} = 90^\circ$. Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ και Ν είναι το μέσο του τμήματος ΑΕ, να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{N}M} = 90^\circ$.

Λύση (1ος τρόπος)

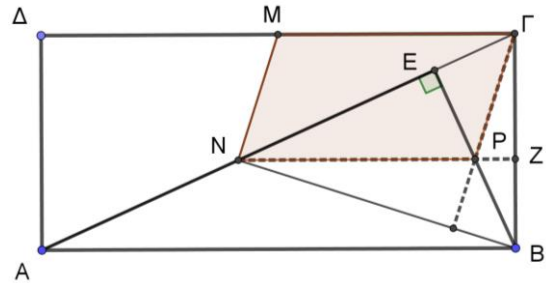
Από το Ν φέρουμε παράλληλη προς την ευθεία ΓΔ η οποία τέμνει το τμήμα ΒΕ στο σημείο Ρ και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ. Επειδή το Ν είναι το μέσο της πλευράς ΑΕ του τριγώνου ΑΒΕ, έπεται ότι το Ρ είναι το μέσο της πλευράς ΒΕ και

$$NP = \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \Gamma M.$$

Επειδή $NP \parallel \Gamma\Gamma$, έπεται ότι το τετράπλευρο ΝΡΓΜ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $NM \parallel \Gamma\Gamma$.

Όμως επειδή $NP \parallel \Gamma\Gamma$ και $\Gamma\Gamma \perp B\Gamma$, έπεται ότι $NP \perp B\Gamma$.

Επομένως στο τρίγωνο ΝΒΓ τα ΒΕ και ΝΖ είναι ύψη του που τέμνονται στο Ρ το οποίο είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΝΒΓ. Άρα θα είναι και $\Gamma\Gamma \perp NB$ και αφού $MN \parallel \Gamma\Gamma$, έπεται ότι: $MN \perp NB$ Άρα είναι $\widehat{B\hat{N}M} = 90^\circ$.



2ος τρόπος.

Έστω Κ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Τότε το τετράπλευρο ΚΒΓΜ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, και άρα οι διαγώνιοι του είναι ίσες και διχοτομούνται. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγώνιών του, τότε

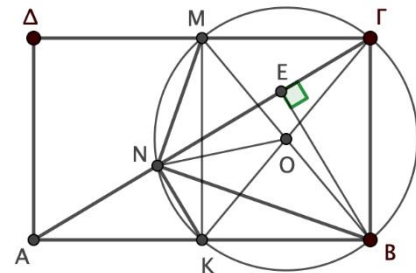
$$OK = OB = OG = OM.$$

Επίσης, αφού το τμήμα ΚΝ συνδέει τα μέσα των πλευρών ΑΕ και ΑΒ του τριγώνου ΑΕΒ, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά, δηλ. την ΒΕ. Συνεπώς, $KN \perp NG$,

οπότε το τρίγωνο ΚΝΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΚΓ. Τότε, όμως, είναι

$$ON = OK = OG.$$

Άρα το σημείο Ο ισαπέχει από τα σημεία Κ, Β, Γ, Μ, και Ν, που σημαίνει ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε κύκλο ω με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΓ. Τότε, όμως, είναι $\widehat{B\hat{N}M} = \widehat{B\hat{K}M}$, αφού οι γωνίες αυτές βαίνουν στο ίδιο τόξο του ω. Συνεπώς, $\widehat{B\hat{N}M} = 90^\circ$.



Θέματα τάξεων Λυκείου

Πρόβλημα 1

Η εξίσωση

$$x^4 + 5x^3 + mx^2 + 5nx + 4 = 0, \text{ όπου } m, n \text{ θετικοί ακέραιοι,}$$

έχει δύο απλές πραγματικές λύσεις με άθροισμα -5 . Να προσδιορίσετε την τιμή των m, n και όλες τις λύσεις της εξίσωσης.

Λύση

Έστω $\rho_1 < \rho_2$ οι δύο πραγματικές λύσεις της δεδομένης εξίσωσης με $\rho_1 + \rho_2 = -5$ και $\rho_1 \rho_2 = b$. Τότε το πολυώνυμο

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) = x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1 \rho_2 = x^2 + 5x + b$$

είναι διαιρέτης του πολυωνύμου $x^4 + 5x^3 + mx^2 + 5nx + 4$, οπότε έχουμε την ισότητα πολυωνύμων

$$x^4 + 5x^3 + mx^2 + 5nx + 4 = (x^2 + 5x + b)(x^2 + cx + d),$$

με $b, c, d \in \mathbb{R}$, $25 - 4b > 0$ και $c^2 - 4d < 0$ και m, n θετικοί ακέραιοι. Επομένως, έχουμε την ισότητα πολυωνύμων

$$x^4 + 5x^3 + mx^2 + 5nx + 4 = x^4 + (c + 5)x^3 + (b + d + 5c)x^2 + (bc + 5d)x + bd,$$

$$\Leftrightarrow c + 5 = 5, b + d + 5c = m, bc + 5d = 5n, bd = 4,$$

$$\Leftrightarrow c = 0, \quad b + d = m, \quad d = n, \quad bd = 4.$$

Επειδή $d = n$ θετικός ακέραιος, από την ισότητα $b + d = m$, όπου m θετικός ακέραιος, έπεται ότι και ο $b = m - n$ είναι θετικός ακέραιος, αφού $bd = 4 > 0$, οπότε έχουμε:

$$n(m - n) = 4 \Leftrightarrow (n, m - n) \in \{(1, 4), (4, 1), (2, 2)\} \Leftrightarrow \\ (m, n) \in \{(5, 1), (5, 4), (4, 2)\}.$$

Για την εύρεση των ριζών της εξίσωσης έχουμε τις περιπτώσεις:

(α) Αν $(m, n) = (5, 1)$ τότε $b = 4, d = 1$ και η εξίσωση γίνεται

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = -4 \text{ ή } x = i \text{ ή } x = -i.$$

(β) Αν $(m, n) = (5, 4)$, τότε $b = 1, d = 4$ και η εξίσωση γίνεται

$$(x^2 + 5x + 1)(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2} \text{ ή } x = 2i \text{ ή } x = -2i.$$

(γ) Αν $(m, n) = (4, 2)$, τότε $b = 2, d = 2$ και η εξίσωση γίνεται

$$(x^2 + 5x + 2)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ ή } x = \sqrt{2}i \text{ ή } x = -\sqrt{2}i.$$

2ος τρόπος. Έστω $P(x) = x^4 + 5x^3 + mx^2 + 5nx + 4$ και έστω b το γινόμενο των δύο πραγματικών ριζών του $P(x)$. Η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(x)$: $(x^2 + 5x + b)$ είναι

$$P(x) = (x^2 + 5x + b)(x^2 + m - b) + (5b - 5m + 5n)x + b^2 - bm + 4.$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης, αφού έχει δύο πραγματικές ρίζες (αυτές του τριωνύμου $x^2 + 5x + b$, είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Αυτό ισχύει αν, και μόνο αν,

$$b = m - n \quad \text{και} \quad b^2 - bm + 4 = 0.$$

Έτσι, $m = b + n$, ενώ με αντικατάσταση της πρώτης σχέσης στη δεύτερη παίρνουμε $bn = 4$. Αφού ο b είναι θετικός ακέραιος, παίρνουμε τις τριάδες $(b, m, n) = (1, 5, 4), (2, 4, 2)$, και $(4, 5, 1)$. Η εύρεση των ριζών γίνεται όπως στον πρώτο τρόπο.

Σχόλιο. Οι σχέσεις $b = m - n$ και $bn = 4$ προκύπτουν και από τους τύπους Vieta για τις ρίζες του $P(x)$. Πράγματι, το άθροισμα των ριζών $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ του $P(x)$ είναι ίσο

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = -5,$$

οπότε το $P(x)$ έχει δύο ρίζες ρ_3, ρ_4 οι οποίες είναι συζυγείς μη πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα μηδέν. Άρα είναι της μορφής $\rho_3 = ai$ και $\rho_4 = -ai$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Από την $P(ai) - P(-ai) = 0$, παίρνουμε $10ia^3 - 10ian = 0$, και αφού $a \neq 0$, έπεται ότι $n = a^2$. Επιπλέον, από Vieta, είναι

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 = 4,$$

η οποία δίνει $bn = ba^2 = 4$. Και πάλι από Vieta, έχουμε

$$\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_1 \rho_4 + \rho_2 \rho_3 + \rho_2 \rho_4 + \rho_3 \rho_4 = m.$$

Αφού

$$\rho_1 \rho_3 + \rho_1 \rho_4 + \rho_2 \rho_3 + \rho_2 \rho_4 = (\rho_1 + \rho_2)(\rho_3 + \rho_4) = -5 \cdot 0 = 0,$$

$$\rho_1 \rho_2 = b, \text{ και } \rho_3 \rho_4 = a^2 = n, \text{ παίρνουμε } b + n = m.$$

Πρόβλημα 2

Έστω $AB\Gamma$ οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο και έστω Δ ένα σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z στην ευθεία AD τέτοια, ώστε $EB \perp AB$ και $Z\Gamma \perp A\Gamma$, και τα σημεία H και Θ στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $EH \parallel A\Gamma$ και $Z\Theta \parallel AB$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BHE τέμνει για δεύτερη φορά την ευθεία AB στο σημείο M ($M \neq B$), και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\Gamma\Theta Z$ τέμνει για δεύτερη φορά την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο N ($N \neq \Gamma$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες MH , $N\Theta$ και AD διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση

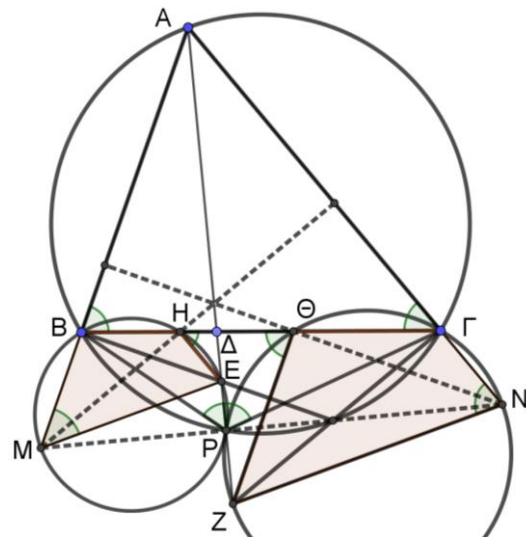
Παρατηρούμε ότι από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $MBHE$ προκύπτει η ισότητα

$$\widehat{M\hat{H}E} = \widehat{M\hat{H}B} = 90^\circ,$$

οπότε από την παραλληλία $EH \parallel A\Gamma$ προκύπτει ότι $MH \perp A\Gamma$. Ομοίως προκύπτει και η σχέση $N\Theta \perp AB$, οπότε οι ευθείες MH και $N\Theta$ ορίζουν δύο ύψη του τριγώνου AMN . Επομένως για τη λύση του προβλήματος, αρκεί να αποδείξουμε ότι $AD \perp MN$.

Έστω P το σημείο τομής της ευθείας AD με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$. Από τη σχέση $Z\Theta \parallel AB$ και τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $BMEH$ και $ZN\Gamma\Theta$ έχουμε:

$$\widehat{BME} = \widehat{E\hat{H}\Gamma} = \widehat{H\hat{\Gamma}A} = \widehat{B\hat{\Gamma}A} = \widehat{B\hat{P}A}.$$



Επομένως το τετράπλευρο BMPE είναι εγγράψιμο, οπότε το σημείο P ανήκει στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BHE. Άρα είναι

$$\widehat{APM} = \widehat{EPM} = 180^\circ - \widehat{MBE} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

και συνεπώς $AP \perp MP$.

Ομοίως, από τη σχέση $EH \parallel AG$ και τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα BMEH και ZNΓΘ έχουμε:

$$\widehat{GPA} = \widehat{GBA} = \widehat{B\hat{O}Z} = \widehat{Z\hat{N}\Gamma}.$$

Επομένως το τετράπλευρο PZNG είναι εγγράψιμο, οπότε το σημείο P ανήκει στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΓΘZ. Άρα είναι

$$\widehat{ZPN} = \widehat{Z\hat{\Gamma}N} = 90^\circ$$

και συνεπώς $AP \perp PN$.

Από τις σχέσεις $AP \perp MP$ και $AP \perp PN$ προκύπτει ότι τα σημεία M, P, N είναι συνευθειακά και ότι $AD \perp MN$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x + 2y) + f(2x - y) = 5f(x) + 5f(y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{Q}$.

Λύση

Με $x = y = 0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε: $f(0) = 0$.

Με $x \in \mathbb{Q}^*$, $y = 0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(x) + f(2x) = 5f(x) + 5f(0) \Rightarrow f(2x) = 4f(x) \Rightarrow f(2x) = 2^2 f(x)$$

Με $x = y \in \mathbb{Q}^*$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(3x) + f(x) = 10f(x) \Rightarrow f(3x) = 9f(x) = 3^2 f(x).$$

Επιπλέον, με $x = 0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(2y) + f(-y) = 5f(y) \Rightarrow f(-y) = 5f(y) - 4f(y) \Rightarrow f(-y) = f(y),$$

για κάθε $y \in \mathbb{Q}^*$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι άρτια.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε ισχυρή επαγωγή.

Αν υποθέσουμε ότι $f(kx) = k^2 f(x)$, $k = 1, 2, \dots, 2n - 1 \in \mathbb{N}^*$, για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε:

- Από τη δεδομένη σχέση με $y = 0$ και το nx αντί του x , λαμβάνουμε:

$$f(2nx) + f(nx) = 5f(nx) + 5f(0) \Rightarrow f(2nx) = 4f(nx) = 4n^2 f(x)$$

- Από τη δεδομένη σχέση με $y = nx$ λαμβάνουμε

$$f(x + 2nx) + f(2x - nx) = 5f(x) + 5f(nx)$$

$$\xrightarrow{f \text{ άρτια}} f((2n + 1)x) + f((n - 2)x) = 5f(x) + 5f(nx)$$

$$\Rightarrow f((2n + 1)x) = 5f(x) + 5n^2 f(x) - (n - 2)^2 f(x)$$

$$\Rightarrow f((2n + 1)x) = (5n^2 - n^2 + 4n - 4 + 5)f(x)$$

$$\Rightarrow f((2n+1)x) = (2n+1)^2 f(x).$$

Άρα έχουμε $f(nx) = n^2 f(x)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{Q}$, οπότε για $x = 1$ λαμβάνουμε

$$f(n) = n^2 f(1), n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n) = an^2, a = f(1), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Θεωρούμε τώρα το τυχόν $x = \frac{p}{q} > 0$, με $p, q \in \mathbb{N}^*$. Τότε έχουμε:

$$q^2 f(x) = f(qx) = f(p) = p^2 f(1) \Rightarrow f(x) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 f(1),$$

οπότε τελικά, λόγω της αρτιότητας της συνάρτησης f έχουμε

$$f(x) = ax^2, a = f(1), \quad x \in \mathbb{Q}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2, a = f(1)$ ικανοποιούν τη δεδομένη συνθήκη.

2ος τρόπος. Παρατηρούμε ότι με $y = 0$, η δοθείσα εξίσωση δίνει

$$f(2x) = 4f(x) + 5f(0) \quad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Η (1) με $x = 0$ δίνει $f(0) = 0$, οπότε γράφεται

$$f(2x) = 4f(x), \quad (2)$$

για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Από την (2) παίρνουμε $f(4x) = 4f(2x) = 16f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, και από την αρχική με $x = y$ παίρνουμε $f(3x) = 10f(x) - f(x) = 9f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Θα αποδείξουμε με επαγωγή επί του n ότι για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ ισχύει

$$f(nx) = n^2 f(x) \quad (3)$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 0$. Από τις παραπάνω σχέσεις, η (3) ισχύει για $n = 0, 1, 2, 3$, και 4. Έστω ότι η (3) ισχύει για κάθε $n = 1, 2, \dots, k$, για κάποιο $k \geq 4$. Τότε

$$f((k+1)x) = f((k-3)x + 4x) = 5f((k-3)x) + 5f(2x) - f(2(k-3)x - 2x).$$

Από την (2) με $(k-4)x$ στη θέση του x , και την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε

$$f(2(k-3)x - 2x) = f(2(k-4)x) = 4f((k-4)x) = 4(k-4)^2 f(x).$$

Έτσι,

$$f((k+1)x) = 5(k-3)^2 f(x) + 20f(x) - 4(k-4)^2 f(x) = (k+1)^2 f(x),$$

αφού

$$5(k-3)^2 + 20 - 4(k-4)^2 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,$$

δηλ. η (3) ισχύει και για $n = k+1$, οπότε η επαγωγή ολοκληρώθηκε.

Αν $x = \frac{n}{m} > 0$ θετικός ρητός, τότε

$$m^2 f(x) = f(mx) = f(n) = n^2 f(1),$$

οπότε $f(x) = f(1)x^2$. Με $x = 0$ και $y = x$ στην αρχική εξίσωση, παίρνουμε

$$f(2x) + f(-x) = 5f(x),$$

οπότε $f(x) = f(-x)$, και άρα $f(x) = f(1)x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Πρόβλημα 4

Να αποδείξετε ότι, για κάθε ακέραιο y , ο αριθμός $y^2 + 108$ δεν είναι τέλειος κύβος ακεραίου.

Λύση.

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$y^2 + 108 = x^3 \quad (1)$$

δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Η (1) γράφεται

$$y^2 + 100 = x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4),$$

με $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 \geq 3$. Αν ο x είναι περιττός, τότε

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 \equiv 3 \pmod{4}$$

οπότε υπάρχει πρώτος αριθμός $p \equiv 3 \pmod{4}$ με $y^2 \equiv -100 \pmod{p}$. Τότε, όμως, το -1 θα είναι τετραγωνικό υπόλοιπο $\pmod{p}$, και άρα $p \equiv 1 \pmod{4}$, άτοπο.

Άρα ο x είναι άρτιος, οπότε το ίδιο ισχύει και για τον y . Έστω $x = 2m$, και $y = 2n$, για κάποιους ακέραιους m, n . Τότε η εξίσωση (1) γράφεται

$$n^2 = 2m^3 - 27.$$

Προφανώς ο n είναι περιττός. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Ο m είναι άρτιος. Τότε $m^3 \equiv 0 \pmod{8}$, οπότε

$$n^2 = 2m^3 - 27 \equiv -3 \pmod{8},$$

άτοπο.

- Ο m είναι περιττός. Τότε $2m^3 \equiv 2 \pmod{4}$ και

$$n^2 = 2m^3 - 27 \equiv -25 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4},$$

άτοπο.

Συνεπώς, δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y τέτοιοι ώστε $y^2 + 108 = x^3$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

43^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

28 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2026

Ενδεικτικές λύσεις

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

Πρόβλημα 1. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + (2 - a)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0,$$

όπου x είναι ο άγνωστος και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του a για τις οποίες:

(α) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$.

(β) Η μία ρίζα της εξίσωσης είναι διπλάσια της άλλης.

Λύση

(α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = (2 - a)^2 - 4(-2a^2 + 5a - 3) = 9a^2 - 24a + 16 = (3a - 4)^2$$

Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$, αν είναι

$$\Delta = (3a - 4)^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{4}{3} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}.$$

(β) Για $a \neq \frac{4}{3}$ οι δύο ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{a - 2 \pm (3a - 4)}{2}, \text{ δηλαδή } x_1 = 2a - 3 \text{ και } x_2 = -a + 1.$$

Έχουμε τις περιπτώσεις:

- $x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow 2a - 3 = 2(-a + 1) \Leftrightarrow 4a = 5 \Leftrightarrow a = \frac{5}{4}.$
- $x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow -a + 1 = 2(2a - 3) \Leftrightarrow 5a = 7 \Leftrightarrow a = \frac{7}{5}.$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $a = \frac{5}{4}$ και $a = \frac{7}{5}.$

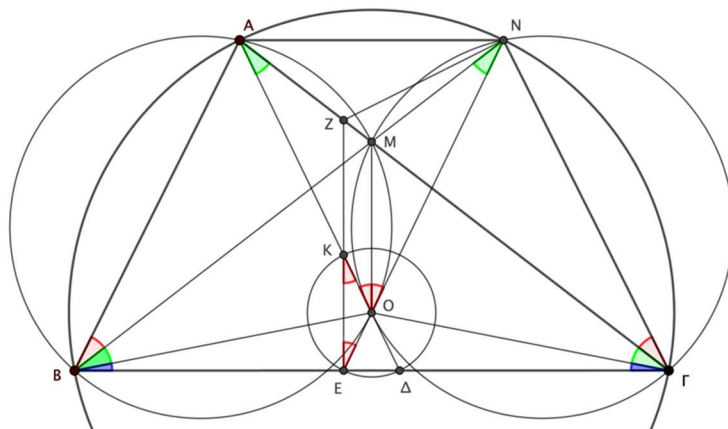
Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του με κέντρο O .

Η ευθεία AO τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο E , $E \neq \Delta$, ώστε $OE = OD$. Η κάθετη ευθεία προς την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E τέμνει την πλευρά

$$Z\hat{\Gamma}N = M\hat{\Gamma}N = M\hat{O}N = Z\hat{E}N.$$

Συνεπώς, τα σημεία N, Z, E, Γ είναι ομοκυκλικά.



(2^{ος} τρόπος) Αν K είναι το σημείο τομής του κύκλου (O, OΔ) με την ΑΓ, τότε $KE \perp BG$, αφού το τρίγωνο ΚΕΔ είναι ορθογώνιο με διάμεσο την ΕΟ. Άρα το Κ βρίσκεται πάνω στην ΖΕ, και από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΟΚ, έχουμε

$$\widehat{ΕΚΟ} = \widehat{ΚΕΟ} = \widehat{ΖΕΝ}.$$

Με τέμνουσα των ΜΟ, ΖΕ, την ευθεία ΑΚΟ σχηματίζονται οι εντός εναλλάξ γωνίες ίσες:

$$\widehat{ΕΚΟ} = \widehat{ΚΟΜ} = \widehat{ΑΟΜ}.$$

Λόγω του ισοσκελούς τριγώνου ΒΟΝ, παίρνουμε

$$\widehat{ΟΑΜ} = \widehat{ΟΝΜ} = \widehat{ΟΒΜ},$$

οπότε το τετράπλευρο ΟΒΑΜ είναι εγγράψιμο. Επομένως,

$$\widehat{ΖΓΝ} = \widehat{ΑΓΝ} = \widehat{ΑΒΝ} = \widehat{ΑΒΜ} = \widehat{ΑΟΜ} = \widehat{ΖΕΝ}.$$

Συνεπώς, τα σημεία N, Z, E, Γ είναι ομοκυκλικά.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του θετικού ακέραιου n , για τις οποίες ο καθένας από τους αριθμούς $n - 210$ και $n + 210$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

Έστω ότι

$$n - 210 = \alpha^2 \quad \text{και} \quad n + 210 = \beta^2, \quad (1)$$

όπου α, β θετικοί ακέραιοι. Τότε θα είναι $0 < \alpha < \beta$ και

$$\beta^2 - \alpha^2 = (n + 210) - (n - 210) = 420 \Leftrightarrow$$

$$(\beta + \alpha)(\beta - \alpha) = 420 \quad (2)$$

Επιπλέον, έχουμε

$$(\beta + \alpha) - (\beta - \alpha) = 2\alpha, \text{ άρτιος,} \quad (3)$$

οπότε προκύπτει ότι οι αριθμοί $(\beta + \alpha), (\beta - \alpha)$ είναι είτε και οι δύο άρτιοι είτε και οι δύο περιττοί. Από τη σχέση (2) συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $(\beta + \alpha), (\beta - \alpha)$ είναι και οι δύο άρτιοι.

Η σχέση (2) γίνεται

$$(\beta + \alpha)(\beta - \alpha) = 420 \Leftrightarrow (\beta + \alpha)(\beta - \alpha) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

από την οποία, λόγω του ότι οι αριθμοί $(\beta + \alpha), (\beta - \alpha)$ είναι και οι δύο άρτιοι, προκύπτουν τα ζεύγη

$$(\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 5 \cdot 7) \text{ ή } (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 7)$$

$$\text{ή } (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (2 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 5) \text{ ή } (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (2, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$$

$$\Leftrightarrow (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (6, 70) \text{ ή } (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (10, 42)$$

$$\text{ή } (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (14, 30) \text{ ή } (\beta - \alpha, \beta + \alpha) = (2, 210) \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (32, 38) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (16, 26) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (8, 27) \text{ ή } (\alpha, \beta) = (104, 106) \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) λαμβάνουμε:

$$v = \alpha^2 + 210 \quad \text{και} \quad v = \beta^2 - 210,$$

και λόγω των σχέσεων (4) έχουμε:

$$v = 32^2 + 210 = 1234 \text{ ή } v = 16^2 + 210 = 466$$

$$\text{ή } v = 8^2 + 210 = 274 \text{ ή } v = 104^2 + 210 = 11026.$$

Πρόβλημα 4

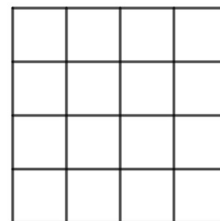
Σε ένα πίνακα 4×4 χωρισμένο σε 16 μικρά τετράγωνα 1×1 τοποθετούμε 4 λευκά και 4 μαύρα πιόνια, έτσι ώστε να ισχύουν:

(α) Κάθε μικρό τετράγωνο 1×1 περιέχει το πολύ ένα πιόνι.

(β) Κάθε (οριζόντια) γραμμή περιέχει 2 πιόνια, ένα λευκό και ένα μαύρο.

(γ) Κάθε (κατακόρυφη) στήλη περιέχει 2 πιόνια, ένα λευκό και ένα μαύρο.

Να βρείτε πόσες διαφορετικές τοποθετήσεις υπάρχουν.



Λύση

Καταρχήν παρατηρούμε ότι από τους όρους (β) και (γ) για τοποθέτηση ενός λευκού και ενός μαύρου πιονιού σε κάθε γραμμή και στήλη προκύπτει ότι δεν μπορούν να υπάρχουν δύο γραμμές της ίδιας μορφής ή δύο στήλες της ίδιας μορφής.

Οι δυνατοί συνδυασμοί για να τοποθετήσουμε 2 πιόνια σε μια γραμμή με τέσσερα τετράγωνα είναι $\binom{4}{2} = 6$. Οι τοποθετήσεις αυτές είναι οι εξής:

T1: (Π, Π, 0, 0), **T2:** (0, 0, Π, Π),

T3: (Π, 0, Π, 0), **T4:** (0, Π, 0, Π),

T5: (Π, 0, 0, Π), **T6:** (0, Π, Π, 0).

Επειδή για κάθε τοποθέτηση δύο πιονιών σε μία γραμμή μένουν δύο θέσεις κενές, παρατηρούμε ότι τα ζεύγη ανά δύο είναι **συμπληρωματικά**: Το T1 με το T2, το T3 με το T4 και το T5 με το T6.

Επειδή πρέπει να έχουμε 4 γραμμές που καμία δεν πρέπει να είναι ίδια με την άλλη, πρέπει να επιλέξουμε 4 διαφορετικές τοποθετήσεις από τις 6 βρήκαμε παραπάνω.

Επιπλέον, για να έχει και κάθε στήλη δύο πιόνια πρέπει οι γραμμές που θα επιλέξουμε να εμφανίζουν όλες τις στήλες του πίνακα με δύο πιόνια. Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει μόνο αν επιλέξουμε δύο ζεύγη συμπληρωματικών γραμμών. Οι δυνατές επιλογές δύο συμπληρωματικών ζευγών από τα τρία ζεύγη που έχουμε είναι $\binom{3}{2} = 3$. Έτσι προκύπτουν τα τετράγωνα

Π	Π		
		Π	Π
Π		Π	
	Π		Π

Π	Π		
		Π	Π
Π			Π
	Π	Π	

Π		Π	
	Π		Π
Π			Π
	Π	Π	

Για κάθε ένα από τα 3 παραπάνω τρία τετράγωνα υπάρχουν $4! = 24$ διαφορετικές μεταθέσεις των γραμμών οι οποίες δεν επηρεάζουν το πλήθος των πιονιών των στηλών. Επειδή σε κάθε τετράγωνο έχουμε τοποθετήσει δύο ζεύγη συμπληρωματικών γραμμών οι στήλες που προκύπτουν είναι διαφορετικές ανά δύο.

Επομένως, για κάθε ένα από τα τρία τετράγωνα έχουμε 24 σωστές τοποθετήσεις, οπότε ο συνολικός αριθμός των τοποθετήσεων, ανεξάρτητα από το χρώμα των πιονιών, είναι:

$$3 \cdot 24 = 72.$$

Επειδή σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη ζητάμε να υπάρχει ένα λευκό και ένα μαύρο πιόνι, πρέπει να ορίσουμε το χρώμα των πιονιών. Παρατηρούμε ότι, αν ορίσουμε το χρώμα ενός οποιουδήποτε πιονιού (π.χ. το πρώτο πάνω αριστερά είναι Λ), τότε τα χρώματα των υπόλοιπων πιονιών στην ίδια γραμμή και στην ίδια στήλη καθορίζονται αυτόματα (πρέπει να είναι Μ). Τότε το δεύτερο πιόνι της τρίτης γραμμής και της δεύτερης στήλης πρέπει να είναι λευκά, οπότε στη συνέχεια το δεύτερο πιόνι της τρίτης στήλης και το δεύτερο πιόνι της τέταρτης γραμμής πρέπει να είναι μαύρα. Τελικά το δεύτερο πιόνι της δεύτερης γραμμής και της τέταρτης στήλης πρέπει να είναι λευκό.

Λ	Μ		
		Μ	Λ
Μ		Λ	
	Λ		Μ

Γενικά για κάθε μία από τις 72 τοποθετήσεις υπάρχουν **2 τρόποι** να οριστούν τα χρώματα, είτε ξεκινώντας με λευκό το πρώτο διαθέσιμο πιόνι, είτε με μαύρο. Επομένως, το πλήθος των διαφορετικών τοποθετήσεων είναι :

$$72 \cdot 2 = 144.$$

Υπάρχουν ακόμη οι τρεις περιπτώσεις χρησιμοποίησης από δύο φορές των συμπληρωματικών ζευγών, στις οποίες υπάρχουν ίδιες γραμμές και ίδιες στήλες, όπως φαίνεται στους παρακάτω πίνακες:

Π	Π		
		Π	Π
Π	Π		
		Π	Π

Π		Π	
	Π		Π
Π		Π	
	Π		Π

Π			Π
	Π	Π	
Π			Π
	Π	Π	

Ο περιορισμός για την ύπαρξη ενός λευκού και ενός μαύρου πιονιού σε κάθε γραμμή και στήλη δίνει τη δυνατότητα διαφοροποίησης των γραμμών που είναι ίδιες.

Στη περίπτωση αυτή σε κάθε πίνακα έχουμε δύο διαφορετικές γραμμές, οπότε οι διαφορετικές μεταθέσεις τους είναι όσο το πλήθος των συνδυασμών των 4 γραμμών ανά 2, δηλαδή $\binom{4}{2} = 6$.

Επιπλέον η χρησιμοποίηση λευκών και μαύρων πιονιών δίνει από δύο διαφορετικές περιπτώσεις στα ζεύγη των ίδιων γραμμών, οπότε σε καθέναν από τους παραπάνω πίνακες προκύπτουν 4 διαφορετικές τοποθετήσεις, όπως φαίνεται παρακάτω για τον πρώτο πίνακα:

Λ	Μ		
		Λ	Μ
Μ	Λ		
		Μ	Λ

Λ	Μ		
		Μ	Λ
Μ	Λ		
		Λ	Μ

Μ	Λ		
		Μ	Λ
Λ	Μ		
		Λ	Μ

Μ	Λ		
		Λ	Μ
Λ	Μ		
		Μ	Λ

Επομένως συνολικά στις περιπτώσεις αυτές προκύπτουν: $3 \cdot 6 \cdot 4 = 72$ διαφορετικές τοποθετήσεις.

Έτσι συνολικά προκύπτουν $144 + 72 = 216$ διαφορετικές τοποθετήσεις που ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος.

Δεύτερη λύση

Έστω $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ μια αναδιάταξη του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ η οποία περιγράφει την τοποθέτηση πιονιών στον πίνακα ως εξής:

στην i – οστή γραμμή του πίνακα, τοποθετούμε πιόνι στη στήλη α_i , για $i = 1, 2, 3, 4$.

Για παράδειγμα, η αναδιάταξη $(1, 3, 2, 4)$ δηλώνει τον παρακάτω πίνακα τοποθέτησης των τεσσάρων λευκών πιονιών:

Λ			
		Λ	
	Λ		
			Λ

Υπάρχουν $4! = 24$ αναδιατάξεις του $\{1, 2, 3, 4\}$, άρα τόσοι είναι οι τρόποι τοποθέτησης των λευκών πιονιών ώστε να μην υπάρχουν δύο λευκά πιόνια στην ίδια στήλη ή στην ίδια γραμμή.

Ας μετρήσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα μαύρα πιόνια (M), ώστε να μην υπάρχουν δύο μαύρα πιόνια στην ίδια στήλη ή στην ίδια γραμμή, και να μην υπάρχουν δύο πιόνια στο ίδιο κελί. Ένα παράδειγμα που συμπληρώνει τον παραπάνω πίνακα είναι το παρακάτω

Λ	M		
M		Λ	
	Λ		M
		M	Λ

Η τοποθέτηση των μαύρων πιονιών παραπάνω αντιστοιχεί στην αναδιάταξη $(2, 1, 4, 3)$ και είναι μια αναδιάταξη της $(1, 3, 2, 4)$ χωρίς σταθερό σημείο.

Το πλήθος των αναδιατάξεων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ χωρίς σταθερό σημείο είναι 9:

$(2,1,4,3), (2,3,4,1), (2,4,1,3), (3,1,4,2), (3,4,1,2), (3,4,2,1), (4,1,2,3), (4,3,1,2), (4,3,2,1)$.

Για κάθε μια από τις 24 δυνατές τοποθετήσεις των λευκών πιονιών στον πίνακα, υπάρχουν λοιπόν 9 δυνατοί τρόποι τοποθέτησης των μαύρων πιονιών. Συνεπώς, συνολικά υπάρχουν $24 \cdot 9 = 216$ διαφορετικές τοποθετήσεις.

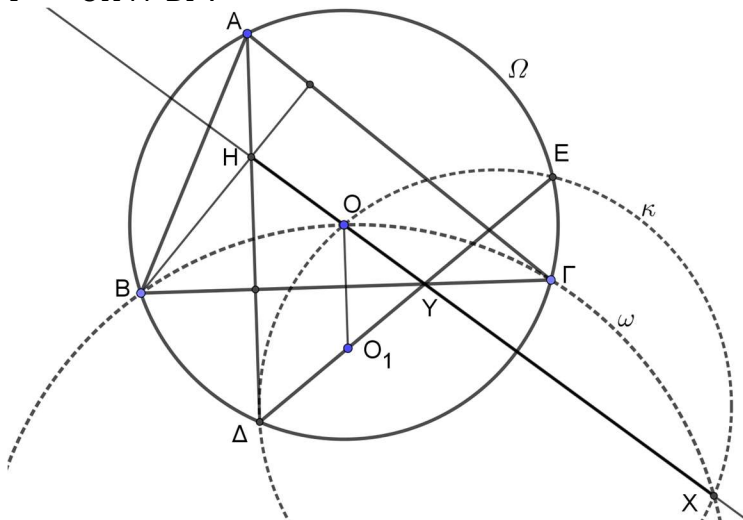
ΛΥΚΕΙΟ

Πρόβλημα 1

Έστω O το περίκεντρο και H το ορθόκεντρο ενός οξυγώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω O_1 το συμμετρικό του O ως προς την ευθεία $B\Gamma$. Η ευθεία AH τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο σημείο Δ ($\Delta \neq A$). Η ευθεία $O_1\Delta$ τέμνει το τόξο $BA\Gamma$ του κύκλου $(AB\Gamma)$ στο σημείο E ($E \neq \Delta$). Να αποδείξετε ότι ο κύκλος $(O\Delta E)$, ο κύκλος $(OB\Gamma)$ και η ευθεία OH συντρέχουν (διέρχονται από το ίδιο σημείο, διαφορετικό του O).

Λύση. (1^{ος} τρόπος) Θέτουμε $\Omega = (A B \Gamma)$, $\omega = (O B \Gamma)$ και $\kappa = (O \Delta E)$.

Θέτουμε επίσης $Y = OH \cap B\Gamma$.



Θεωρούμε τη συμμετρία ως προς την ευθεία $B\Gamma$. Είναι γνωστό από προηγούμενο

- το O απεικονίζεται στο O_1 ,
- το H απεικονίζεται στο Δ .

Άρα η ευθεία OH απεικονίζεται στην ευθεία $O_1\Delta$.

Επειδή το Y ανήκει στην $B\Gamma$, μένει σταθερό από τη συμμετρία, οπότε το Y (που είναι σημείο της OH) πρέπει να ανήκει και στην εικόνα της OH , δηλαδή στην $O_1\Delta$.

Άρα $Y \in O_1\Delta$. Επειδή Δ, E, O_1 είναι συνευθειακά, έχουμε $O_1\Delta \equiv \Delta E$, οπότε: $Y \in \Delta E$. Συνεπώς $Y = B\Gamma \cap \Delta E$.

Ο κύκλος $\kappa = (O \Delta E)$ τέμνει τον Ω στα σημεία Δ, E , άρα ο ριζικός άξονας των κ και Ω είναι η ευθεία ΔE .

Ο κύκλος $\omega = (O B \Gamma)$ τέμνει τον Ω στα σημεία B, Γ , άρα ο ριζικός άξονας των ω και Ω είναι η ευθεία $B\Gamma$.

Οι δύο αυτοί ριζικοί άξονες τέμνονται στο σημείο $\Delta E \cap B\Gamma = Y$. Άρα το Y είναι το ριζικό κέντρο των τριών κύκλων κ, ω, Ω .

Από την ιδιότητα του ριζικού κέντρου, το Y ανήκει και στον ριζικό άξονα των κ και ω . Έστω $X \neq O$ το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων κ και ω (το πρώτο είναι το O). Ο ριζικός

Όμως από τον ορισμό $Y = OH \cap B\Gamma$ έχουμε ότι τα O, H, Y είναι συνευθειακά, δηλαδή η ευθεία OY ταυτίζεται με την ευθεία OH . Επομένως το X (που ανήκει στην OY) ανήκει στην OH .

$$OZ \cdot Z\Theta = \Delta Z \cdot ZE.$$
$$\Delta Z \cdot ZE = BZ \cdot Z\Gamma.$$
$$OZ \cdot Z\Theta = BZ \cdot Z\Gamma,$$

Πρόβλημα 2

$$A = 15^n + 5^n + 3^n + 1$$

Λύση

Έστω ότι η τιμή της παράστασης είναι τέλειο τετράγωνο. Παρατηρούμε ότι είναι

$$A \equiv 5^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod{3}.$$

Αφού τα τέλεια τετράγωνο modulo 3 είναι μόνο το 0 και το 1, ο n θα πρέπει να είναι περιττός.

Έστω $n = 2k + 1$ για κάποιον μη αρνητικό ακέραιο k .

(1ος τρόπος) Έστω $v_2(m)$ είναι η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον ακέραιο m .

Είναι $3^{n-1} = 9^k \equiv 1 \pmod{8}$, οπότε $3^n + 1 \equiv 3 + 1 \equiv 4 \pmod{8}$. Άρα ο αριθμός $3^n + 1$ είναι άρτιος που διαιρείται από το 4, αλλά όχι από το 8. Συνεπώς, $v_2(3^n + 1) = 2$.

Αφού $5 \equiv 1 \pmod{4}$ είναι $5^n + 1 \equiv 2 \pmod{4}$. Άρα ο αριθμός $5^n + 1$ είναι άρτιος που διαιρείται από το 2, αλλά όχι από το 4. Άρα, $v_2(5^n + 1) = 1$.

Τότε είναι

$$v_2(15^n + 5^n + 3^n + 1) = v_2((5^n + 1)(3^n + 1)) = v_2(5^n + 1) + v_2(3^n + 1) = 1 + 2 = 3$$

δηλαδή περιττός, άτοπο.

(2ος τρόπος) Παρατηρούμε ότι

$$15^n + 1 = (15 + 1)(15^{n-1} - 15^{n-2} + \dots - 15 + 1),$$

οπότε

$$15^n + 1 \equiv 0 \pmod{16}.$$

Επίσης,

$$5^n + 3^n = (5 + 3)(5^{n-1} - 5^{n-2} \cdot 3 + \dots - 5 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-1}).$$

Η παράσταση στην παρένθεση είναι αλγεβρικό άθροισμα n όρων, δηλαδή περιττού πλήθους περιττών αριθμών, οπότε είναι περιττός αριθμός. Επομένως,

$$5^n + 3^n \equiv 8 \pmod{16}.$$

Συνεπώς,

$$15^n + 5^n + 3^n + 1 \equiv 8 \pmod{16},$$

δηλαδή το 8 διαιρεί τον αριθμό $15^n + 5^n + 3^n + 1$, αλλά το 16 όχι, άτοπο.

Πρόβλημα 3

Σε καθένα από τα 64 τετράγωνα ενός 8×8 πίνακα γράφουμε έναν αριθμό από το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Η συμπλήρωση του πίνακα λέγεται έγκυρη, αν για κάθε δύο τετράγωνα που έχουν κοινή πλευρά ή κοινή κορυφή, οι αριθμοί που περιέχουν είναι πρώτοι μεταξύ τους (δηλαδή έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1). Να βρεθεί ο μέγιστος ακέραιος k με την ιδιότητα ότι σε κάθε έγκυρη συμπλήρωση του πίνακα, υπάρχει αριθμός από το A που εμφανίζεται τουλάχιστον k φορές.

Λύση

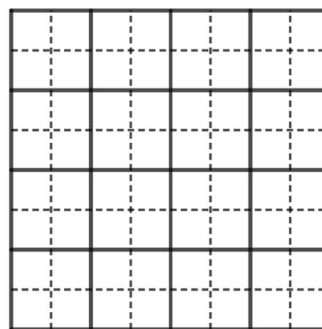
Εξετάζουμε ποιοι αριθμοί από το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο. Έτσι διακρίνουμε τα υποσύνολα:

$B = \{2, 4, 6, 8\}$ που όλα τα στοιχεία του έχουν κοινό διαιρέτη το 2

$\Gamma = \{3, 6, 9\}$ που όλα τα στοιχεία του έχουν κοινό διαιρέτη το 3

$\Delta = \{1, 5, 7\}$ που τα στοιχεία του είναι αριθμοί σχετικά πρώτοι με κάθε άλλον αριθμό από το σύνολο A .

Στη συνέχεια χωρίζουμε το 8×8 τετράγωνο σε 16 τετράγωνα 2×2 . Σε κάθε τέτοιο τετράγωνο όλα τα μικρά τετράγωνα είναι γειτονικά με βάση την υπόθεση. Επομένως σε αυτό μπορεί να γραφεί μόνο ένα στοιχείο του συνόλου B και ένα μόνο στοιχείο του συνόλου Γ . Όταν το στοιχείο αυτό είναι το 6, τότε δεν μπορεί να γραφεί κανένα άλλο στοιχείο από τα σύνολα B και Γ . Επομένως με στοιχεία από τα σύνολα B και Γ μπορούμε να καλύψουμε το πολύ 32 μικρά τετράγωνα.



Απομένουν για συμπλήρωση άλλα 32 μικρά τετράγωνα στα οποία θα πρέπει να γραφούν αριθμοί από το σύνολο Δ . Σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλίας, αν γράψουμε στις 32 θέσεις 3 αριθμούς, τότε ένα τουλάχιστον από αυτούς θα γραφεί

$$\left\lceil \frac{32}{3} \right\rceil = 11 \text{ φορές.}$$

Στο διπλανό τετράγωνο του σχήματος έχουμε γράψει τους αριθμούς των συνόλων B και Γ , χωρίς το κοινό στοιχείο τους το 6, με τέτοιο τρόπο ώστε να χρησιμοποιηθεί κάθε στοιχείο όσο γίνεται λιγότερες φορές. Έχουν όλα αυτά τα στοιχεία γραφεί στην πρώτη, την τρίτη, την πέμπτη και στην έβδομη στήλη του πίνακα, έτσι ώστε να μην είναι ο ίδιος αριθμός σε γειτονικά μικρά τετράγωνα. Έτσι στις 32 δυνατές θέσεις έχουν γραφεί οι αριθμοί 2, 3 και 9 από 8 φορές και οι αριθμοί 4 και 8 από 4 φορές, δηλαδή όλοι αυτοί οι αριθμοί έχουν γραφεί λιγότερες από 11 φορές στον πίνακα.

2	1	2	5	2	7	2	1
3	5	3	7	3	1	3	5
4	7	4	1	4	5	4	7
9	1	9	5	9	7	9	1
8	5	8	7	8	1	8	5
3	7	3	1	3	5	3	7
2	1	2	5	2	7	2	1
9	5	9	7	9	1	9	5

Στη δεύτερη, στη τέταρτη, στην έκτη και στην όγδοη στήλη έχουμε τοποθετήσει τους αριθμούς του συνόλου Δ προσπαθώντας να χρησιμοποιηθεί έκαστος όσο λιγότερες φορές είναι δυνατόν. Έτσι βλέπουμε ότι οι αριθμοί 1 και 5 έχουν χρησιμοποιηθεί 11 φορές και ο αριθμός 7 έχει χρησιμοποιηθεί 10 φορές.

Επομένως, έχουμε βρει μία έγκυρη τοποθέτηση αριθμών στον πίνακα στην οποία εμφανίζονται δύο αριθμοί από το σύνολο A 11 φορές. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια έγκυρη συμπλήρωση του πίνακα στην οποία όλοι οι αριθμοί του συνόλου A εμφανίζονται λιγότερες από 11 φορές, τότε εξετάζοντας τα 2×2 τετράγωνα, όπως παραπάνω, διαπιστώνουμε ότι με οι αριθμοί 2, 3, 4, 6, 8 και 9 μπορούν να γραφούν το πολύ σε 32 μικρά τετράγωνα, οπότε μένουν για συμπλήρωση από τους αριθμούς 1, 5, 7 τουλάχιστον 32 τετράγωνα με χρησιμοποίηση εκάστου εξ αυτών το πολύ 10 φορές, που είναι άτοπο.

Άρα ο ζητούμενος μέγιστος αριθμός είναι ο $k = 11$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι τέτοιες ώστε

$$f(xy + 1) - f(x)f(y) = 2xy + 1, \quad (1)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θέτουμε $y = 0$ στη δεδομένη σχέση, έστω (1), οπότε λαμβάνουμε:

$$f(1) - f(x)f(0) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Αν είναι $f(0) \neq 0$, τότε από τη σχέση (2) προκύπτει η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{f(1) - 1}{f(0)} = c \in \mathbb{R}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

η οποία δεν επαληθεύει τη δεδομένη εξίσωση, αφού

$$c - c^2 = 2xy + 1 \Leftrightarrow 2xy = c - c^2 - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άτοπο.}$$

Άρα είναι $f(0) = 0$ και τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $f(1) = 1$.

Επίσης με $x = 1, y = -1$ στη σχέση (1) προκύπτει:

$$f(0) - f(1)f(-1) = -1 \Rightarrow f(-1) = 1.$$

Εκτελούμε στη σχέση (1) την αλλαγή μεταβλητών: $x \rightarrow xy, y \rightarrow 1$, οπότε

$$f(xy + 1) - f(xy)f(1) = 2xy + 1, \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$f(xy + 1) - f(xy) = 2xy + 1, \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ισότητα:

$$f(x)f(y) = f(xy), \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Θέτουμε $y = 1$ στη σχέση (1), οπότε λαμβάνουμε:

$$f(x + 1) - f(x)f(1) = 2x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$f(x + 1) = f(x) + 2x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

Θέτουμε $x \rightarrow -x + 1, y = -1$ στη σχέση (1), οπότε λαμβάνουμε:

$$f(x - 1 + 1) = f(-x + 1)f(-1) + 2(x - 1) + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$f(1 - x) = f(x) - 2x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

από την οποία με $x \rightarrow -x$ προκύπτει

$$f(1 + x) = f(-x) + 2x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (4) και (6) λαμβάνουμε:

$$f(x) = f(-x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Τελικά, από τη σχέση (1) για $x \rightarrow x, y \rightarrow -x$, λόγω και των (3) – (7) λαμβάνουμε:

$$f(1 - x^2) - f(x)f(-x) = 1 - 2x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (f(x) - 2x + 1)(f(x) + 2x + 1) - (f(x))^2 = 1 - 2x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (f(x))^2 + 2f(x) + 1 - 4x^2 - (f(x))^2 = 1 - 2x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

για την οποία βλέπουμε εύκολα ότι επαληθεύει τη δεδομένη σχέση.