ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
87ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
6 Νοεμβρίου 2026

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (6 μονάδες)

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-8)^2}{(-12)^2-(-8)^2}\right)^3-\frac{13}{5^2},\qquad \mathrm{B}=\left((12-10)^4-(-2)^4+\frac{1}{5}\right)^3-\frac{3}{5^3}$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-8)^2}{(-12)^2-(-8)^2}\right)^3-\frac{13}{5^2}=\left(\frac{64}{144-64}\right)^3-\frac{13}{25}=\left(\frac{64}{80}\right)^3-\frac{13}{25}$$

$$=\left(\frac{4}{5}\right)^3-\frac{13}{25}=\frac{64}{125}-\frac{13}{25}=\frac{64}{125}-\frac{65}{125}=-\frac{1}{125}.$$

$$\mathrm{B}=\left((12-10)^4-(-2)^4+\frac{1}{5}\right)^3-\frac{3}{5^3}=\left(2^4-(-2)^4+\frac{1}{5}\right)^3-\frac{3}{5^3}$$

$$=\left(2^4-2^4+\frac{1}{5}\right)^3-\frac{3}{5^3}=\left(\frac{1}{5}\right)^3-\frac{3}{5^3}=\frac{1}{125}-\frac{3}{125}=-\frac{2}{125}$$

Σύγκριση αριθμών Α και Β:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=-\frac{1}{125}-\left(-\frac{2}{125}\right)=-\frac{1}{125}+\frac{2}{125}=\frac{1}{125}>0\Longrightarrow \mathrm{A}>\mathrm{B}.$$

Πρόβλημα 2 (6 μονάδες)

Οι θετικοί ακέραιοι x, y είναι τέτοιοι ώστε:

$$ΜΚΔ\{x,y\}+ΕΚΠ\{x,y\}=120 \text{ και } x=24.$$

Να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα αιτιολογώντας την απάντησή σας:

(α) Είναι δυνατόν οι θετικοί ακέραιοι x, y να είναι πρώτοι μεταξύ τους;

(β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του y.

Σημείωση: $ΜΚΔ\{x,y\}$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης και $ΕΚΠ\{x,y\}$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των θετικών ακεραίων x, y.

Λύση (α) Αν οι αριθμοί x, y είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε $ΜΚΔ\{x, y\} = 1$, οπότε από τις σχέσεις $ΜΚΔ\{x, y\} + ΕΚΠ\{x, y\} = 120$ και $x = 24$ προκύπτει ότι $ΕΚΠ\{24, y\} = 119$, οπότε το 24 πρέπει να είναι διαιρέτης του 119, που δεν ισχύει.
Άρα δεν είναι δυνατόν οι θετικοί ακέραιοι x, y να είναι πρώτοι μεταξύ τους.

(β) Δίνεται ότι: $ΜΚΔ\{x, y\} + ΕΚΠ\{x, y\} = 120$ και $x = 24$, οπότε έχουμε:

$$ΜΚΔ\{24, y\} + ΕΚΠ\{24, y\} = 120.$$

Οι δυνατές τιμές του $ΜΚΔ\{24, y\}$ είναι οι διαιρέτες του 24 που είναι μεγαλύτεροι του 1, δηλαδή:

$$ΜΚΔ\{24, y\} \in \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

Οι δυνατές τιμές του $ΕΚΠ\{24, y\}$ είναι τα πολλαπλάσια του 24 που είναι μικρότερα του 120, δηλαδή:

$$ΕΚΠ\{24, y\} \in \{24, 48, 72, 96\}.$$

Αν $ΕΚΠ\{24, y\} = 24$, τότε $ΜΚΔ\{24, y\} = 120 - 24 = 96 > 24$, που είναι αδύνατο.

Αν $ΕΚΠ\{24, y\} = 48$, τότε $ΜΚΔ\{24, y\} = 120 - 48 = 72 > 24$, που είναι αδύνατο.

Αν $ΕΚΠ\{24, y\} = 72$, τότε $ΜΚΔ\{24, y\} = 120 - 72 = 48 > 24$, που είναι αδύνατο.

Αν $ΕΚΠ\{24, y\} = 96$, τότε $ΜΚΔ\{24, y\} = 120 - 96 = 24$. Από τη σχέση $ΜΚΔ\{24, y\} = 24$ και ότι $y \leq 96$, επειδή $\text{ΕΚΠ}(24, y) = 96$, προκύπτει ότι $y \in \{24, 48, 72, 96\}$.
Από αυτές τις τιμές ικανοποιεί τη σχέση $ΕΚΠ\{24, y\} = 96$, μόνο η τιμή $y = 96$. Επομένως η μόνη δυνατή τιμή του y είναι το 96.

Διαφορετικά μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:
Έστω $d = \text{ΜΚΔ}\{24, y\}$. Ο d είναι διαιρέτης του 24, και το $\text{ΕΚΠ}\{24, y\} = 120 - d$ είναι πολλαπλάσιο του 24. Επειδή και το $120 = 5 \cdot 24$ είναι πολλαπλάσιο του 24, η διαφορά $120 - (120 - d) = d$ είναι πολλαπλάσιο του 24. Ο μόνος διαιρέτης του 24 που είναι πολλαπλάσιο του 24 είναι ο ίδιος ο 24, άρα $d = 24$ και $\text{ΕΚΠ}\{24, y\} = 96$. Από $d = 24$ έπεται ότι το y είναι πολλαπλάσιο του 24, οπότε $\text{ΕΚΠ}\{24, y\} = y$. Επομένως $y = 96$, που πράγματι ικανοποιεί τη συνθήκη: $24 + 96 = 120$.

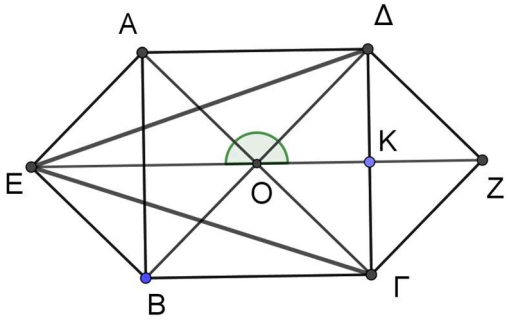
Πρόβλημα 3 (8 μονάδες)

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Επίσης τα τετράπλευρα ΑΕΒΟ και ΔΟΓΖ είναι τετράγωνα.
Να αποδείξετε ότι:

(α) $\text{Ε}\hat{\text{Ο}}\text{Ζ} = 180^{\text{ο}}$.

(β) $\text{ΕΓ} = \text{ΕΔ}$.

Σημείωση: *Να κάνετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα.*



Λύση. (α) Οι διαγώνιοι τετραγώνου γνωρίζουμε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες και διχοτομούν τις γωνίες του, οπότε από τα τετράγωνα ΑΒΓΔ, ΑΕΒΟ και ΔΟΓΖ έχουμε:

$$E\hat{O}A = 45^o\,, \qquad A\hat{O}\Delta = 90^o \quad \text{και} \quad \Delta\hat{O}Z = 45^o.$$

Άρα έχουμε:

$$E\hat{O}Z = E\hat{O}A + A\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}Z = 45^o + 90^o + 45^o = 180^o$$

(β) Επειδή $E\hat{O}Z = 180^o$, τα σημεία Ε, Ο και Ζ ανήκουν στην ευθεία ΕΖ. Έστω Κ το σημείο τομής της ΟΖ με τη ΓΔ. Στο τετράγωνο ΔΟΓΖ οι διαγώνιοι ΟΖ και ΔΓ είναι κάθετες και διχοτομούνται, άρα $OZ \perp \Gamma\Delta$ και $K\Gamma = K\Delta$. Επομένως η ευθεία ΕΖ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ, και κάθε σημείο της ισαπέχει από τα Γ και Δ. Άρα $E\Gamma = E\Delta$.

Διαφορετικά, Επειδή $E\hat{O}Z = 180^o$, τα σημεία Ε, Ο και Ζ ανήκουν στην ευθεία ΕΖ. Έστω Κ το σημείο τομής της ΟΖ με τη ΓΔ. Επειδή $\Gamma\Delta \perp EZ$ και $K\Gamma = K\Delta$, τα σημεία Γ και Δ είναι συμμετρικά ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ΕΖ. Επομένως και τα τμήματα ΕΓ και ΕΔ είναι συμμετρικά ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ΕΖ, οπότε είναι ίσα.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (6 μονάδες)

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left(\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \frac{(-16)^2}{5^2}\right)\cdot\frac{1}{17} - 2\,,$$

$$B = \frac{(-21)^5}{3^5} - \left(-\frac{1}{7}\right)^{-5} - \frac{19}{18}$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

Λύση

$$A = \left(\left(-\frac{12}{5}\right)^2 + \frac{(-16)^2}{5^2}\right)\cdot\frac{1}{17} - 2 = \left(\frac{144}{25} + \frac{256}{25}\right)\cdot\frac{1}{17} - 2 = \frac{400}{25}\cdot\frac{1}{17} - 2$$

$$= 16\cdot\frac{1}{17} - 2 = \frac{16}{17} - \frac{34}{17} = -\frac{18}{17}.$$

$$B = \frac{(-21)^5}{3^5} - \left(-\frac{1}{7}\right)^{-5} - \frac{19}{18} = \left(-\frac{21}{3}\right)^5 - \left(-\frac{1}{7}\right)^{-5} - \frac{19}{18} = (-7)^5 - (-7)^5 - \frac{19}{18} = -\frac{19}{18}.$$

Σύγκριση αριθμών Α και Β:

$$A - B = -\frac{18}{17} - \left(-\frac{19}{18}\right) = -\frac{18}{17} + \frac{19}{18} = \frac{17\cdot 19 - 18\cdot 18}{17\cdot 18} = \frac{323 - 324}{306} = -\frac{1}{306} < 0$$

$$\Rightarrow A < B.$$

Πρόβλημα 2 (6 μονάδες)

Έστω ο τετραψήφιος αριθμός $A = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta$. Αν διαγράψουμε το τελευταίο ψηφίο του προκύπτει ο αριθμός $B = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$. Αν το πενταπλάσιο του αριθμού B είναι μικρότερο από τον αριθμό A κατά 2025, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού A.

Λύση

Ο αριθμός A γράφεται $A = 10B + \delta$, όπου δ το τελευταίο ψηφίο του, $0 \le \delta \le 9$.
Σύμφωνα με την υπόθεση $A - 5B = 2025$, δηλαδή

$$10B + \delta - 5B = 2025 \Leftrightarrow 5B = 2025 - \delta.$$

Άρα ο $2025 - \delta$ είναι πολλαπλάσιο του 5, και επειδή το 2025 είναι πολλαπλάσιο του 5, πρέπει και ο δ να είναι πολλαπλάσιο του 5: $\delta \in \{0,5\}$.

- Αν $\delta = 0$, τότε $5B = 2025$, $B = 405$ και $A = 4050$.
- Αν $\delta = 5$, τότε $5B = 2020$, $B = 404$ και $A = 4045$.

Και οι δύο τιμές είναι τετραψήφιοι αριθμοί με τριψήφιο B. Επαλήθευση: $4050 - 5 \cdot 405 = 4050 - 2025 = 2025$ και $4045 - 5 \cdot 404 = 4045 - 2020 = 2025$. Επομένως $A \in \{4045, 4050\}$.

Πρόβλημα 3 (8 μονάδες)

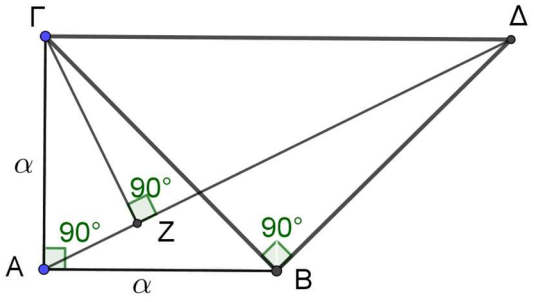
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $AB = A\Gamma = \alpha$ και $B\hat{A}\Gamma = 90^o$. Δίνεται ότι $\Gamma\hat{B}\Delta = 90^o$, $B\Gamma = B\Delta$. Τα σημεία Α και Δ βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ΒΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ.

(γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΓΖ του τριγώνου ΑΔΓ.

Σημείωση: *Να κάνετε στην κόλλα σας το δικό σας σχήμα.*



Λύση

(α) Από τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ με $B\hat{A}\Gamma = 90^o$ και ΒΓΔ με $\Gamma\hat{B}\Delta = 90^o$, συμπεραίνουμε ότι $A\hat{\Gamma}B = 45^o$ και $B\hat{\Gamma}\Delta = 45^o$, οπότε

$$A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}\Delta = 45^o + 45^o = 90^o.$$

Άρα οι ευθείες ΒΑ και ΔΓ είναι κάθετες προς την ευθεία ΑΓ, οπότε είναι παράλληλες.

(β) Το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΔΓ και ύψος ΑΓ. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ λαμβάνουμε

$$\text{ΒΓ}^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Rightarrow \text{ΒΓ} = \alpha\sqrt{2}.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΓΔ με $\text{ΒΓ} = \text{ΒΔ} = \alpha\sqrt{2}$, λαμβάνουμε

$$\text{ΓΔ}^2 = \left(\alpha\sqrt{2}\right)^2 + \left(\alpha\sqrt{2}\right)^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha^2 = 4\alpha^2 \Rightarrow \text{ΓΔ} = 2\alpha.$$

Άρα έχουμε:

$$\text{E}_{\text{ΑΒΔΓ}} = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + 2\alpha) \cdot \alpha = \frac{3\alpha^2}{2}.$$

Διαφορετικά: Το τετράπλευρο $ΑΒΔΓ$ χωρίζεται από τη διαγώνιο $ΒΓ$ σε δύο ορθογώνια τρίγωνα, οπότε

$$\text{E}_{\text{ΑΒΔΓ}} = \text{E}_{\text{ΑΒ}} + \text{E}_{\text{ΒΓΔ}} = \frac{\text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΓ}}{2} + \frac{\text{ΒΓ} \cdot \text{ΒΔ}}{2} = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\text{ΒΓ}^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{2\alpha^2}{2} = \frac{3\alpha^2}{2},$$

αφού από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒΓ είναι $\text{ΒΓ}^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$.

(γ) Έχουμε ότι:

$$\text{E}_{\text{ΑΓΔ}} = \frac{1}{2} \cdot \text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΔ} = \frac{1}{2} \cdot \text{ΑΔ} \cdot \text{ΓΖ},$$

όπου $\text{ΑΓ} = \alpha,\ \text{ΓΔ} = 2\alpha\ και$

$$\text{ΑΔ}^2 = \alpha^2 + (2\alpha)^2 = \alpha^2 + 4\alpha^2 = 5\alpha^2 \Rightarrow \text{ΑΔ} = \alpha\sqrt{5}.$$

Άρα έχουμε:

$$\text{E}_{\text{ΑΓΔ}} = \frac{1}{2} \cdot \text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΔ} = \frac{1}{2} \cdot \text{ΑΔ} \cdot \text{ΓΖ} \Leftrightarrow \alpha \cdot 2\alpha = \alpha\sqrt{5} \cdot \text{ΓΖ} \Leftrightarrow \text{ΓΖ} = \frac{2\alpha^2}{\alpha\sqrt{5}} \Leftrightarrow \text{ΓΖ} = \frac{2\sqrt{5}\alpha}{5}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (6 μονάδες)

Έστω ο τετραψήφιος αριθμός $A = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta$. Διαγράφουμε το τελευταίο ψηφίο του A, οπότε προκύπτει ο αριθμός $B = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$. Αν το τριπλάσιο του αριθμού B είναι μικρότερο από τον αριθμό A κατά 2024, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού A.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$A = 3B + 2024 \Leftrightarrow 10B + \delta = 3B + 2024 \Leftrightarrow 7B = 2024 - \delta$$

Άρα ο αριθμός $2024 - \delta$ είναι πολλαπλάσιο του 7, οπότε $\delta \in \{1, 8\}$.

- Αν $\delta = 1$, τότε $7B = 2023 \Leftrightarrow B = 289$ και $A = 2891$.
- Αν $\delta = 8$, τότε $7B = 2016 \Leftrightarrow B = 288$ και $A = 2888$.

Πρόβλημα 2 (6 μονάδες)
Να βρείτε όλες τις τριάδες θετικών ακεραίων (a, b, c) για τις οποίες ισχύουν

$$a + b + c = 2026 \qquad \text{και} \qquad a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca + 1.$$

Λύση (1ος τρόπος)
Η δεύτερη ισότητα γράφεται:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca + 1 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 2 \Leftrightarrow$$
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2.$$

Επειδή οι αριθμοί a, b, c είναι ακέραιοι, συμπεραίνουμε ότι οι δύο από τους όρους του πρώτου μέλους της προηγούμενης ισότητας πρέπει να είναι ίσοι με 1 και ο άλλος όρος να ισούται με 0.

1η περίπτωση Αν $(a-b)^2 = 0$ και $(b-c)^2 = (c-a)^2 = 1$, τότε:

$$a = b \text{ και } b - c = \pm 1.$$

Επιπλέον έχουμε $a + b + c = 2026$, οπότε προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$a = b,\ \ b - c = \pm 1, a + b + c = 2026 \Leftrightarrow$$
$$a = b,\ \ b - c = 1, 2b + c = 2026 \qquad (1)$$
$$\Leftrightarrow a = b, b = 1 + c, 2 + 2c + c = 2026 \Leftrightarrow a = b = 1 + c, c = \frac{2024}{3} \notin \mathbb{Z}$$
ή
$$a = b,\ \ b - c = -1, 2b + c = 2026 \qquad (2)$$
$$\Leftrightarrow a = b, b = -1 + c, -2 + 2c + c = 2026 \Leftrightarrow a = b = -1 + c, c = 676$$
$$(a, b, c) = (675, 675, 676).$$

Από τις υπόλοιπες περιπτώσεις προκύπτουν ομοίως οι λύσεις:

$$(a, b, c) = (675, 676, 675) \text{ και } (a, b, c) = (676, 675, 675).$$

(2ος τρόπος)
Η δεύτερη ισότητα, μετά από πολλαπλασιασμό με 2, γράφεται

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) = 2$$

δηλ.

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2.$$

Τρία τετράγωνα ακεραίων με άθροισμα 2 είναι καθένα 0 ή 1, και ακριβώς δύο από αυτά ισούνται με 1. Άρα δύο από τους a, b, c είναι ίσοι και ο τρίτος διαφέρει από αυτούς κατά 1: οι τρεις αριθμοί είναι, με κάποια σειρά, είτε $k, k, k+1$ είτε $k, k+1, k+1$ για κάποιον θετικό ακέραιο k.
Στην πρώτη περίπτωση $3k + 1 = 2026$, δηλαδή $k = 675$. Στη δεύτερη είναι $3k + 2 = 2026$, δηλαδή $3k = 2024$, αδύνατο. Επομένως οι ζητούμενες τριάδες είναι οι μεταθέσεις της (675,675,676):

$$(675,675,676), \quad (675,676,675), \quad (676,675,675),$$

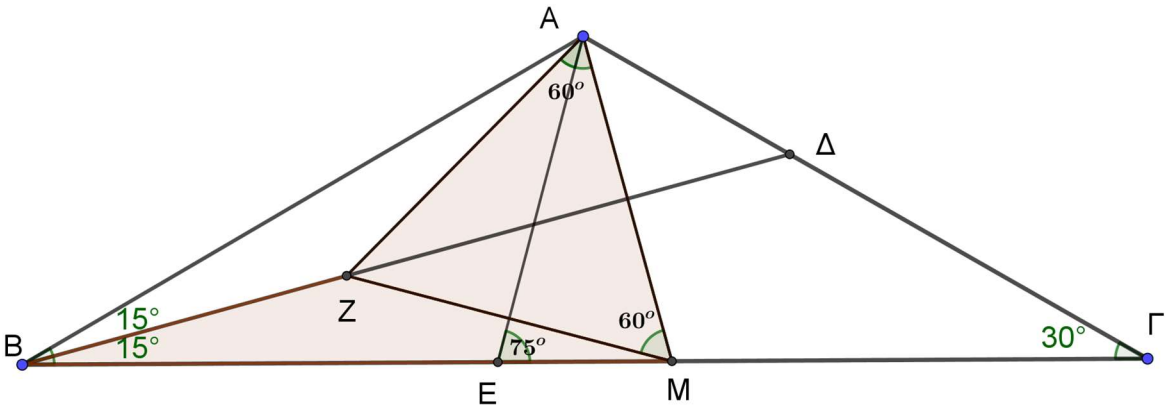
οι οποίες εύκολα βλέπουμε ότι επαληθεύουν τις ζητούμενες σχέσεις.

Πρόβλημα 3 (8 μονάδες)

Έστω ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο με $AB = A\Gamma$ και $B\hat{A}\Gamma = 120^o$. Η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma A$ και στο τμήμα ΒΔ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε $AZ = AE$. Να αποδείξετε ότι $AZ = BZ$.

Λύση (1ος τρόπος)

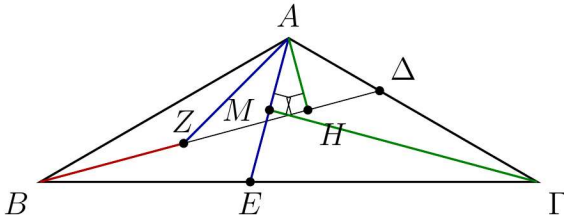
Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 120^o$, έχουμε: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 30^o$.
Επειδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, έχουμε: $A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma = 15^o$.
Από το ισοσκελές τρίγωνο ΓΑΕ με $\hat{\Gamma} = 30^o$, έχουμε: $\Gamma\hat{A}E = \Gamma\hat{E}A = 75^o$.
Θεωρούμε σημείο Μ πάνω στην πλευρά ΒΓ τέτοιο ώστε $BM = BA$.
Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΜ με $\hat{B} = 30^o$, έχουμε: $B\hat{A}M = B\hat{M}A = 75^o$.
Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΕ είναι ίσα, αφού έχουν $A\Gamma = AB = BM = \Gamma E$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 30^o$. Επομένως, έχουμε $AE = AM$.



Η διχοτόμος ΒΔ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΜ είναι και μεσοκάθετος της πλευράς ΑΜ, οπότε $ZA = ZM$ και αφού $ZA = AE = AM$, το τρίγωνο ΑΖΜ είναι ισόπλευρο.
Από $\angle BAM = 75^\circ$ και $\angle ZAM = 60^\circ$, η $\angle BAZ$ είναι 15° ή 135°. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται, επειδή $Z \in B\Delta$ και συνεπώς $\angle BAZ < \angle BA\Gamma = 120^\circ$.
Άρα $\angle BAZ = 15^\circ = \angle ABZ$, οπότε $AZ = BZ$, το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές .

(2ος τρόπος)

Επειδή $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 120^\circ$, είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$, οπότε $A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma = 15^\circ$.
Έστω Μ η προβολή του Γ στην ΑΕ και Η η προβολή του Α στην ευθεία ΒΔ.



Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΑΕ ($\Gamma A = \Gamma E$) το ύψος ΓΜ είναι και διάμεσος και διχοτόμος, άρα $A\hat{\Gamma}M = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΓ και ΑΗΒ έχουν ίσες υποτείνουσες $A\Gamma = AB$ και ίσες οξείες γωνίες $A\hat{\Gamma}M = A\hat{B}H = 15^\circ$, άρα είναι ίσα, οπότε

$$\text{AH} = \text{AM} = \frac{\text{AE}}{2} = \frac{\text{AZ}}{2}.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AHZ η κάθετη πλευρά AH είναι το μισό της υποτείνουσας AZ, οπότε

$$\text{ημA}\hat{\text{Z}}\text{H} = \frac{\text{AH}}{\text{AZ}} = \frac{1}{2} = \text{ημ}30^\circ.$$

Άρα $\text{A}\hat{\text{Z}}\text{H} = 30^\circ$ (αφού είναι οξεία). Από το ορθογώνιο τρίγωνο AHZ, επειδή $\text{AH} = \text{AZ}/2$, έχουμε $\text{A}\hat{\text{Z}}\text{H} = 30^\circ$. Καθώς τα B, Z, H είναι συνευθειακά, η $\text{A}\hat{\text{Z}}\text{B}$ είναι 30° ή 150°. Όμως είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου AZΔ, οπότε

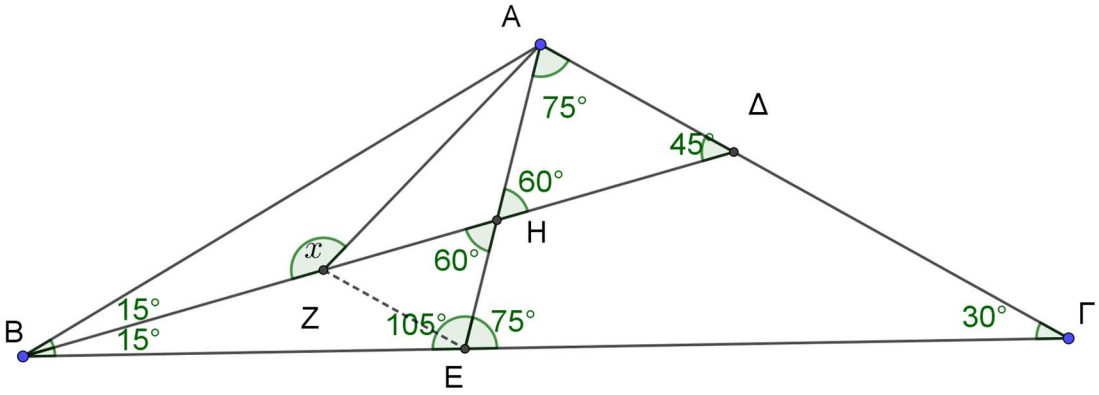
$$\text{A}\hat{\text{Z}}\text{B} > \text{A}\hat{\Delta}\text{Z} = 45^\circ.$$

Επομένως $\text{A}\hat{\text{Z}}\text{B} = 150^\circ$, άρα

$$\text{Z}\hat{\text{A}}\text{B} = 180^\circ - 150^\circ - 15^\circ = 15^\circ = \text{A}\hat{B}\text{Z}.$$

Συνεπώς $\text{AZ} = \text{BZ}$.

(3ος τρόπος, τριγωνομετρική λύση)



Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{A}} = 120^\text{o}$, έχουμε: $\hat{\text{B}} = \hat{\Gamma} = 30^\text{o}$.
Επειδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{B}}$, έχουμε: $\text{A}\hat{\text{B}}\Delta = \Delta\hat{\text{B}}\Gamma = 15^\text{o}$.
Από το ισοσκελές τρίγωνο ΓΑΕ με $\hat{\Gamma} = 30^\text{o}$, έχουμε: $\Gamma\hat{\text{A}}\text{E} = \text{A}\hat{\text{E}}\Gamma = 75^\text{o}$.
Η γωνία $\text{A}\hat{\Delta}\text{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΔΓ, οπότε: $\text{A}\hat{\Delta}\text{B} = 30^\text{o} + 15^\text{o} = 45^\text{o}$.
Έστω $\text{H} = \text{AE} \cap \text{BΔ}$. Η γωνία $\text{A}\hat{\text{H}}\text{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΗ, οπότε:

$$\text{A}\hat{\text{H}}\text{B} = 45^\text{o} + 75^\text{o} = 120^\text{o}.$$

Οι γωνίες $\text{A}\hat{\text{H}}\text{B}$ και $\text{Z}\hat{\text{H}}\text{E}$ είναι παραπληρωματικές, οπότε: $\text{Z}\hat{\text{H}}\text{E} = 180^\text{o} - \text{A}\hat{\text{H}}\text{B} = 60^\text{o}$.
Οι γωνίες $\text{A}\hat{\text{E}}\Gamma$ και $\text{A}\hat{\text{E}}\text{B}$ είναι παραπληρωματικές, οπότε: $\text{A}\hat{\text{E}}\text{B} = 180^\text{o} - \text{A}\hat{\text{E}}\Gamma = 105^\text{o}$.
Θα αποδείξουμε και ότι $\text{B}\hat{\text{A}}\text{Z} = 15^\text{o}$.
Έστω $\text{B}\hat{\text{Z}}\text{A} = x > \text{A}\hat{\Delta}\text{Z} = 45^\text{o}$, αφού είναι εξωτερική στο τρίγωνο AZΔ.
Θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα AZB και AEB για να εκφράσουμε τις ίσες πλευρές AZ και AE του ισοσκελούς τριγώνου AZE συναρτήσει της κοινής πλευράς τους AB. Έχουμε

$$\frac{\text{AB}}{\eta\mu x}=\frac{\text{AZ}}{\eta\mu 15^o}\Longrightarrow \text{AB}=\text{AZ}\cdot\frac{\eta\mu x}{\eta\mu 15^{\text{o}}} \qquad (1)$$

$$\frac{\text{AB}}{\eta\mu 105^o}=\frac{\text{AE}}{\eta\mu 30^{\text{o}}}\Longrightarrow \text{AB}=\text{AE}\cdot\frac{\eta\mu 105^o}{\eta\mu 30^{\text{o}}} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{\eta\mu x}{\eta\mu 15^{\text{o}}}=\frac{\eta\mu 105^o}{\eta\mu 30^{\text{o}}}\Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{\eta\mu 105^o\cdot\eta\mu 15^{\text{o}}}{\eta\mu 30^{\text{o}}}\Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{\sigma\upsilon\nu 15^o\cdot\eta\mu 15^{\text{o}}}{2\eta\mu 15^{\text{o}}\cdot\sigma\upsilon\nu 15^{\text{o}}}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu 30^{\text{o}}\Leftrightarrow x=150^{\text{o}},$$

αφού η γωνία $\text{B}\hat{\text{Z}}\text{A}=x>45^{\text{o}}$.
Επομένως θα είναι $\text{B}\hat{\text{A}}\text{Z}=180^{\text{o}}-150^{\text{o}}-15^{\text{o}}=15^{\text{o}}=\text{A}\hat{\text{B}}\text{Z}$,
οπότε το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές με $\text{AZ}=\text{BZ}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (6 μονάδες)

Αν ο αριθμός x είναι τριψήφιος θετικός ακέραιος και ο αριθμός y είναι ακέραιος διαφορετικός από τους 0 και -2 και ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{x}{y}+\frac{x+2}{y+2}=2,$$

Να βρείτε πόσες είναι οι δυνατές διαφορετικές τιμές της παράστασης

$$A=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{x}{y}+\frac{x+2}{y+2}=2\Leftrightarrow xy+2x+xy+2y=2y^2+4y\Leftrightarrow 2xy-2y^2+2x-2y=0$$

$$\Leftrightarrow 2y(x-y)+2(x-y)=0\Leftrightarrow 2(x-y)(y+1)=0\Leftrightarrow x=y\ \text{ή}\ y=-1.$$

[Διαφορετικά, αφαιρώντας μία μονάδα από κάθε κλάσμα παίρνουμε

$$\frac{x}{y}-1+\frac{x+2}{y+2}-1=0\Leftrightarrow\frac{x-y}{y}+\frac{x-y}{y+2}=0\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y+2}\right)=0$$

Η οποία αληθεύει αν και μόνο αν

$$x=y\,\text{ή}\,y+2=-y\Leftrightarrow x=y\ \text{ή}\ y=-1.]$$

Αν $x=y$, τότε $y\neq -2,0$ και

$$A=\frac{x^2-x^2}{x^2+x^2}=0,\qquad x\in\{100,101,\dots,999\},$$

δηλαδή έχουμε μία μόνο δυνατή τιμή.
Αν $y=-1$, τότε

$$A=\frac{x^2-1}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1},\qquad x\in\{100,101,\dots,999\},$$

οπότε η παράσταση A μπορεί να πάρει 900 διαφορετικές τιμές, γιατί αν θεωρήσουμε $a,b\in\{100,101,\dots,999\}$, τότε έχουμε:

$$1-\frac{2}{a^2+1}=1-\frac{2}{b^2+1}\Longrightarrow\frac{2}{a^2+1}=\frac{2}{b^2+1}\Longrightarrow a^2=b^2\overset{a,b>0}{\Longleftrightarrow}a=b.$$

Οι παραπάνω 900 τιμές της παράστασης A είναι διαφορετικές από το 0, αφού $x^2-1\neq 0$, για κάθε $x\in\{100,101,\dots,999\}$.
Επομένως οι δυνατές διαφορετικές τιμές της παράστασης A είναι 901.

Πρόβλημα 2 (6 μονάδες)
Να βρείτε όλους τους ακεραίους n για τους οποίους η εξίσωση

$$x^2-nx-n-5=0$$

έχει ρητές ρίζες.

Λύση. (1ος τρόπος) Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι ακέραιοι, οπότε οι ρίζες είναι ρητές ακριβώς όταν η διακρίνουσα Δ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, αφού αν $\sqrt{\Delta}$ είναι ρητός και Δ ακέραιος, τότε ο $\sqrt{\Delta}$ είναι ακέραιος. Είναι

$$\Delta=n^2+4n+20=(n+2)^2+16.$$

Ζητούμε ακέραιο $m\geq 0$ με $(n+2)^2+16=m^2$, δηλαδή

$$(m-n-2)(m+n+2)=16.$$

Οι δύο παράγοντες έχουν άθροισμα $2m$, άρα είναι της ίδιας αρτιότητας, και επειδή το γινόμενό τους είναι άρτιο, είναι και οι δύο άρτιοι. Επιπλέον το άθροισμά τους $2m$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 0, οπότε είναι θετικοί. Οι δυνατές αναλύσεις του 16 ως γινόμενο δύο άρτιων θετικών ακεραίων είναι $2\cdot 8, 4\cdot 4, 8\cdot 2$, και από την σχέση

$$n+2=\frac{(m+n+2)-(m-n-2)}{2}$$

παίρνουμε $n+2\in\{3,0,-3\}$, δηλαδή

$$n\in\{1,-2,-5\}.$$

(2ος τρόπος) Όπως και στον 1ο τρόπο, πρέπει η διακρίνουσα

$$\Delta=n^2+4n+20=(n+2)^2+16.$$

να είναι τέλειο τετράγωνο. Αν $|n+2|\geq 8$, έχουμε

$$(|n+2|+1)^2=(n+2)^2+2|n+2|+1>(n+2)^2+16>|n+2|^2,$$

Δηλ. η Δ βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικά τετράγωνα, άρα δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Για $|n+2|<8$, έχουμε τον πίνακα τιμών της Δ:

$\lvert n+2\rvert$	0	1	2	3	4	5	6	7
Δ	16	17	20	25	32	41	52	65

Άρα η Δ είναι τέλειο τετράγωνο αν και μόνο αν

$$|n+2|=0 \text{ ή } |n+2|=3,$$

οπότε $n=-2,1$ ή -5.

Επαλήθευση: για $n=1$, η εξίσωση γράφεται $x^2-x-6=0$ με ρίζες $3,-2$, για $n=-2$, έχουμε $x^2+2x-3=0$ με ρίζες $1,-3$, και για $n=-5$, είναι $x^2+5x=0$ με ρίζες $0,-5$.

(**3ος τρόπος**) Αν η εξίσωση έχει ρητή ρίζα $\frac{\kappa}{\lambda}$, $\lambda>0$ (ανάγωγο κλάσμα), τότε

$$\kappa^2=\lambda\,(n\kappa+n\lambda+5\lambda),$$

άρα $\lambda \mid \kappa^2$ και, αφού $(\kappa,\lambda)=1$, $\lambda=1$, δηλ. οι ρητές ρίζες μονικού πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές είναι ακέραιες. Αν r είναι ακέραια ρίζα, η άλλη ρίζα $n-r$ είναι επίσης ακέραια. Έστω λοιπόν r,s οι ακέραιες ρίζες. Από Vieta, έχουμε

$$r+s=n \text{ και } rs=-n-5,$$

οπότε

$$rs+r+s=-5 \Leftrightarrow (r+1)(s+1)=-4.$$

Οι αναλύσεις του -4 σε γινόμενο δύο ακεραίων δίνουν

$$\{r+1,s+1\}=\{1,-4\},\{-1,4\},\{2,-2\},$$

δηλαδή

$$\{r,s\}=\{0,-5\},\{-2,3\},\{1,-3\}$$

και

$$n=r+s\in\{-5,1,-2\}.$$

Αντίστροφα, για καθεμία από τις τιμές αυτές οι ρίζες είναι οι παραπάνω ακέραιοι.

Πρόβλημα 3 (8 μονάδες)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Έστω ΑΔ ύψος και ΒΕ διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ. Αν είναι $\text{ΒΕ}=2\cdot\text{ΑΔ}$, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση (1ος τρόπος)

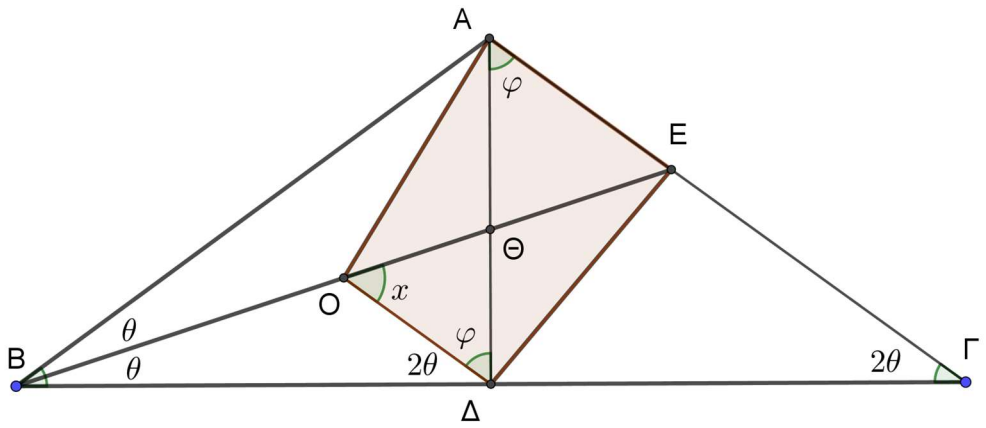
Έστω $\widehat{\text{Β}}=\widehat{\Gamma}=2\theta$ και $\widehat{\text{Α}}=2\varphi$, οπότε $\varphi+2\theta=90^o$.

Έστω Ο το μέσο του ΒΕ και έστω η ΔΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Λ.

Επειδή Δ μέσο ΒΓ και Ο μέσο ΒΕ έπεται ότι ΔΛ ∥ ΑΓ, οπότε το τετράπλευρο ΑΟΔΕ είναι τραπέζιο. Από την υπόθεση προκύπτει ότι το τραπέζιο ΑΟΔΕ έχει ίσες διαγωνίους, αφού

$$\text{ΟΕ} = \frac{\text{ΒΕ}}{2} = \text{ΑΔ}.$$

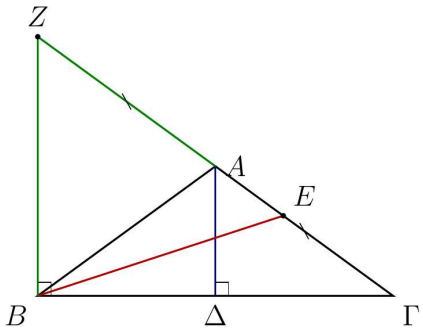
Επομένως το τραπέζιο ΑΟΔΕ είναι ισοσκελές, οπότε $\text{Ε}\hat{\text{Ο}}\Delta = \text{Α}\hat{\Delta}\text{Ο}$.



Όμως $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ο} = \Delta\hat{\text{Α}}\Gamma = \varphi$, από την παραλληλία ΔΛ ∥ ΑΓ και $\text{Ε}\hat{\text{Ο}}\Delta = 3\theta$, ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΟΔ. Άρα έχουμε $\text{Ε}\hat{\text{Ο}}\Delta = \text{Α}\hat{\Delta}\text{Ο} \Longrightarrow \varphi = 3\theta$.
Επειδή $\varphi + 2\theta = 90^{\text{o}}$, έπεται ότι $5\theta = 90^{\text{o}} \Longrightarrow \theta = 18^{\text{o}}$.
Άρα $\hat{\text{Β}} = \hat{\Gamma} = 36^{\text{o}}$ και $\hat{\text{Α}} = 108^{\text{o}}$.

(2ος τρόπος)

Έστω $\hat{\text{Β}} = \hat{\Gamma} = 2\theta$ και έστω Ζ το σημείο τομής της προέκτασης της ΓΑ πέρα από το Α και της κάθετης ευθείας στη ΒΓ στο Β.



Αφού οι ΖΒ, ΑΔ είναι κάθετες στην ΒΓ, έπεται ότι ΖΒ ∥ ΑΔ, και αφού το Δ είναι το μέσο της ΒΓ, στο τρίγωνο ΖΒΓ το Α είναι το μέσο της ΖΓ και $\text{ΖΒ} = 2\text{ΑΔ} = \text{ΒΕ}$. Άρα το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισοσκελές με $\text{Β}\hat{\text{Ε}}\text{Ζ} = \text{Β}\hat{\text{Ζ}}\text{Ε}$. Η $\text{Β}\hat{\text{Ε}}\text{Α}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΕΓ, οπότε

$$\text{Β}\hat{\text{Ε}}\text{Ζ} = \text{Β}\hat{\text{Ε}}\text{Α} = \text{Ε}\hat{\text{Β}}\Gamma + \text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Β} = \theta + 2\theta = 3\theta,$$

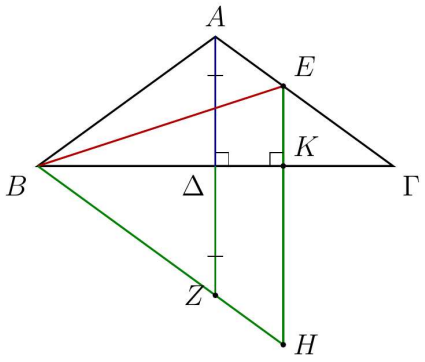
ενώ είναι $\text{Β}\hat{\text{Ζ}}\text{Ε} = \text{Β}\hat{\text{Ζ}}\Gamma = 90^{\circ} - 2\theta$ στο ορθογώνιο τρίγωνο $ZB\Gamma$. Επομένως

$$3\theta = 90^{\circ} - 2\theta \Leftrightarrow \theta = 18^{\circ},$$

δηλαδή $\hat{\text{Α}} = 108^{\circ}$, $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 36^{\circ}$. Αντίστροφα, για $\theta = 18^{\circ}$ οι γωνίες $\text{Β}\hat{\text{Ε}}\text{Ζ}$, $\text{Β}\hat{\text{Ζ}}\text{Ε}$ είναι και οι δύο 54°, άρα $\text{ΒΕ} = \text{ΒΖ} = 2 \cdot \text{ΑΔ}$.

(3ος τρόπος)

Έστω $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 2\theta$, οπότε $\widehat{EB\Gamma} = \theta$. Έστω Ζ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ (δηλαδή το σημείο της προέκτασης της ΑΔ πέρα από το Δ με ΔΖ = ΔΑ). Από το Ε φέρνουμε την παράλληλη προς την ΑΔ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Κ και την προέκταση της ΒΖ πέρα από το Ζ στο Η.



Το Δ είναι μέσο τόσο της ΑΖ όσο και της ΒΓ, άρα το τετράπλευρο ΑΒΖΓ είναι παραλληλόγραμμο και ΒΖ ∥ ΑΓ. Επειδή επιπλέον ΕΗ ∥ ΑΖ, το τετράπλευρο ΑΖΗΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

$$EH = AZ = 2A\Delta = BE.$$

Άρα το τρίγωνο ΒΕΗ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΗ, δηλαδή $\widehat{EBH} = \widehat{EHB}$.

Από τη συμμετρία ως προς την ΒΓ είναι $\Gamma\widehat{BZ} = \Gamma\widehat{BA} = 2\theta$, και επειδή το Η βρίσκεται στην ημιευθεία ΒΖ,

$$\widehat{EBH} = E\widehat{B\Gamma} + \Gamma\widehat{BZ} = \theta + 2\theta = 3\theta.$$

Εξάλλου ΕΗ ⊥ ΒΓ, οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΗ είναι $\widehat{EHB} = \widehat{KHB} = 90° - \widehat{KBH} = 90° - 2\theta$. Επομένως

$$3\theta = 90° - 2\theta \Leftrightarrow \theta = 18°,$$

δηλαδή $\hat{A} = 108°$, $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 36°$. Αντίστροφα, για $\theta = 18°$ οι γωνίες $\widehat{EBH}$, $\widehat{EHB}$ είναι και οι δύο 54°, άρα ΒΕ = ΕΗ = ΑΖ = 2 · ΑΔ.

(4ος τρόπος, τριγωνομετρική λύση)

Έστω $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 2\theta$ και $\hat{A} = 2\varphi$, οπότε $A\hat{E}B = 3\theta$ *και* $\varphi + 2\theta = 90^o$. Έστω ΒΓ = α, ΓΑ = β και ΑΒ = γ. Από το τρίγωνο ΑΒΕ και το νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{BE}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{AB}{\eta\mu A\hat{E}B} \Longrightarrow \frac{BE}{\eta\mu 2\varphi} = \frac{AB}{\eta\mu 3\theta} \Longrightarrow BE = \gamma \cdot \frac{\eta\mu 2\varphi}{\eta\mu 3\theta}. \qquad (1)$$

Από το τρίγωνο ορθογώνιο ΑΔΒ έχουμε:

$$A\Delta = AB \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (2)$$

Επομένως, από την υπόθεση ΒΕ = 2 · ΑΔ και τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε:

$$\gamma \cdot \frac{\eta\mu 2\varphi}{\eta\mu 3\theta} = 2\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \overset{\gamma\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\eta\mu 2\varphi}{\eta\mu 3\theta} = 2\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \eta\mu 2\varphi = 2\eta\mu 3\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi = 2\eta\mu 3\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \overset{0^o<\varphi<90^o}{\Leftrightarrow} \eta\mu\varphi = \eta\mu 3\theta$$

$$\Leftrightarrow \varphi = 3\theta \ \text{ή} \ \varphi = 180^o - 3\theta.$$

Αν $\varphi = 3\theta$, τότε από τη σχέση $\varphi + 2\theta = 90^o$ προκύπτει: $\theta = 18^o$ και $\varphi = 54^o$, οπότε:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = 36^0 \ \text{ και } \hat{A} = 108^o.$$

Αν $\varphi = 180^o - 3\theta$, τότε από τη σχέση $\varphi + 2\theta = 90^o$ προκύπτει: $\theta = 90^o$, η οποία απορρίπτεται.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (6 μονάδες)

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί x, y που ικανοποιούν και τις δύο παρακάτω εξισώσεις:

$$x^2 - 10y = 85$$
$$y^2 - 6x = 106.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, οπότε λαμβάνουμε:

$$x^2 - 10y + y^2 - 6x = 191 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 225$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 = 15^2 \qquad (1)$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$x^2 = 10y + 85. \qquad (2)$$

Επειδή ο y είναι θετικός ακέραιος συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός x^2 λήγει σε 5 και είναι μεγαλύτερος του 95. Επομένως οι πιθανές τιμές του x λήγουν σε 5 και πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 10, δηλαδή $x = 5k, \ k > 2$ περιττός.
Αν $x = 15$, τότε από την εξίσωση (2) έχουμε $10y = 140 \Leftrightarrow y = 14$.
Το ζευγάρι $(x, y) = (15,14)$ παρατηρούμε ότι ικανοποιεί και τη δεύτερη εξίσωση, αφού $14^2 - 6 \cdot 15 = 106$, οπότε το ζευγάρι $(x, y) = (15,14)$ είναι λύση του συστήματος.
Αν $x \geq 25$, τότε από την εξίσωση (1) έχουμε

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 \geq (25-3)^2 + (y-5)^2 = 484 + (y-5)^2 > 225$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζευγάρι $(x, y) = (15,14)$.

(2ος τρόπος)

Με αφαίρεση κατά μέλη των δύο εξισώσεων λαμβάνουμε:

$$x^2 - y^2 + 6x - 10y = -21 \Leftrightarrow (x+3)^2 - (y+5)^2 = -37$$

$$\Leftrightarrow (y+5)^2 - (x+3)^2 = 37 \Leftrightarrow (y + x + 8)(y - x + 2) = 37.$$

Επειδή ο 37 είναι πρώτος και $y+x+8 > y-x+2$, αφού οι x, y είναι θετικοί ακέραιοι, έπεται ότι

$$y+x+8 = 37 \text{ και } y-x+2 = 1 \Leftrightarrow x+y = 29 \text{ και } x-y = 1 \Leftrightarrow (x,y) = (15,14).$$

Επειδή το ζευγάρι $(x,y) = (15,14)$ επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, αυτό είναι η μοναδική λύση του.

(3ος τρόπος)

Από την πρώτη εξίσωση $10y = x^2 - 85$, η οποία δίνει

$$100y^2 = x^4 - 170x^2 + 7225$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη με 100 και λύνουμε ως προς $100y^2$:

$$100y^2 = 600x + 10600$$

Άρα είναι

$$x^4 - 170x^2 + 7225 = 600x + 10600,$$

ή ισοδύναμα,

$$x^4 - 170x^2 - 600x - 3375 = 0.$$

Αναζητούμε ρίζα ανάμεσα στους διαιρέτες του σταθερού όρου $3375 = 15^3$ και διαπιστώνουμε ότι $x = 15$ είναι ρίζα:

$$15^4 - 170 \cdot 15^2 - 600 \cdot 15 - 3375 = 50625 - 38250 - 9000 - 3375 = 0.$$

Διαιρούμε με $x - 15$ με το σχήμα Horner:

1	0	−170	−600	−3375	$\rho = 15$
	15	225	825	3375	
1	15	55	225	0	

Άρα

$$x^4 - 170x^2 - 600x - 3375 = (x-15)(x^3 + 15x^2 + 55x + 225).$$

Ο δεύτερος παράγοντας έχει όλους τους συντελεστές θετικούς, οπότε για $x > 0$ είναι θετικός και δεν μηδενίζεται. Επομένως $x = 15$ και $y = \frac{225-85}{10} = 14$, και το ζεύγος $(15,14)$ επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.

Σχόλιο. Ο τρόπος αυτός δείχνει κάτι περισσότερο: η λύση είναι μοναδική στους θετικούς πραγματικούς και η υπόθεση της ακεραιότητας δεν χρειάζεται. Η θετικότητα του x όμως χρειάζεται: ο τριτοβάθμιος παράγοντας έχει πραγματική ρίζα $x \approx -11{,}98$, που δίνει δεύτερη πραγματική λύση του συστήματος με $x < 0$ (και $y \approx 5{,}84$).

Πρόβλημα 2 (6 μονάδες)

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί για κάθε πραγματικό x τη σχέση

$$f(x) + 2f(1-x) = 3x.$$

(α) Να βρείτε τον τύπο της f.

(β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του γινομένου $f(x)\cdot f(1-x)$, καθώς και την τιμή του x για την οποία επιτυγχάνεται.

Λύση

(α) Η σχέση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό, άρα και για τον $1-x$ στη θέση του x:

$$f(1-x)+2f(x)=3(1-x).$$

Έχουμε έτσι το σύστημα

$$f(x)+2f(1-x)=3x, \qquad 2f(x)+f(1-x)=3-3x.$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη σχέση με 2 και αφαιρούμε την πρώτη:

$$3f(x)=6-6x-3x=6-9x,$$

άρα

$$f(x)=2-3x.$$

Εύκολα κάνουμε επαλήθευση:

$$f(x)+2f(1-x)=(2-3x)+2\big(2-3(1-x)\big)=2-3x-2+6x=3x$$

για κάθε x. Άρα, πράγματι, $f(x)=2-3x$ για κάθε x.

(β) Είναι $f(1-x)=2-3(1-x)=3x-1$, οπότε

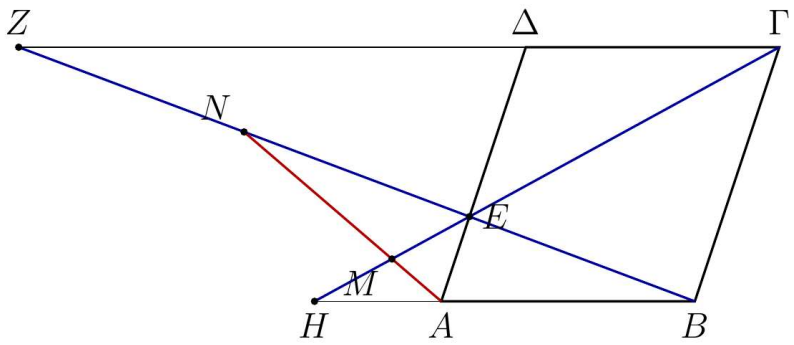
$$f(x)\,f(1-x)=(2-3x)(3x-1)=-9x^2+9x-2=-9\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4},$$

με ισότητα ακριβώς για $x=\frac{1}{2}$ (όπου $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$).

Άρα η ζητούμενη μέγιστη τιμή είναι $\frac{1}{4}$, για $x=\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο E της πλευράς $A\Delta$ τέτοιο ώστε $\Delta E=2\cdot EA$. Έστω Z το σημείο τομής των ευθειών BE και $\Gamma\Delta$, και H το σημείο τομής των ευθειών ΓE και AB. Αν M είναι το μέσο του HE και N το μέσο του EZ, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, M, N είναι συνευθειακά.



Λύση. (1ος τρόπος) Θέτουμε $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ και $\vec{v}=\overrightarrow{A\Delta}$ (μη συγγραμμικά διανύσματα), οπότε

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{u} + \vec{v}$$

και, από $\Delta E = 2EA$,

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\vec{v}.$$

Επειδή $\Gamma\Delta \parallel AB$, τα τρίγωνα $Z\Delta E$ και BAE είναι όμοια (οι γωνίες στο E είναι κατακορυφήν και οι $\widehat{Z\Delta E}$, $\widehat{BAE}$ εντός εναλλάξ), με λόγο $\frac{\Delta E}{EA} = 2$. Άρα $Z\Delta = 2\,AB$, και το Z βρίσκεται στην προέκταση της $\Gamma\Delta$ πέρα από το Δ. Άρα

$$\overrightarrow{\Delta Z} = -2\vec{u} \text{ και } \overrightarrow{AZ} = \vec{v} - 2\vec{u}.$$

Ομοίως τα τρίγωνα HAE και $\Gamma\Delta E$ είναι όμοια με λόγο $\frac{EA}{E\Delta} = \frac{1}{2}$, άρα $AH = \frac{1}{2}\,\Gamma\Delta = \frac{1}{2}\,AB$, με το H στην προέκταση της BA πέρα από το A. Άρα

$$\overrightarrow{AH} = -\frac{1}{2}\vec{u}.$$

Από τον τύπο του μέσου,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AE}) = -\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v},$$

και

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{v} + \vec{v} - 2\vec{u}\right) = -\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}.$$

Επομένως $\overrightarrow{AN} = 4 \cdot \overrightarrow{AM}$, οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ είναι συγγραμμικά, και άρα τα A, M, N είναι συνευθειακά.

(2ος τρόπος) Επειδή $\Gamma\Delta \parallel AB$, τα τρίγωνα $Z\Delta E$ και BAE είναι όμοια (οι γωνίες στο E είναι κατακορυφήν και οι $\widehat{Z\Delta E}$, $\widehat{BAE}$ εντός εναλλάξ), με λόγο $\frac{\Delta E}{EA} = 2$. Άρα $\Delta Z = 2 \cdot AB$, και το Z βρίσκεται στην προέκταση της $\Gamma\Delta$ πέρα από το Δ. Ομοίως, επειδή $AE \parallel B\Gamma$, από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο $HB\Gamma$ είναι

$$\frac{HA}{HB} = \frac{AE}{B\Gamma} = \frac{AE}{A\Delta} = \frac{1}{3},$$

οπότε $HB = 3 \cdot HA$. Το H βρίσκεται στην προέκταση της BA πέρα από το A, οπότε $HB = HA + AB$ και $AH = \frac{1}{2} \cdot AB$. Ειδικότερα, τα τμήματα AH και ΔZ είναι παράλληλα, ομόρροπα, και

$$\Delta Z = 4 \cdot AH.$$

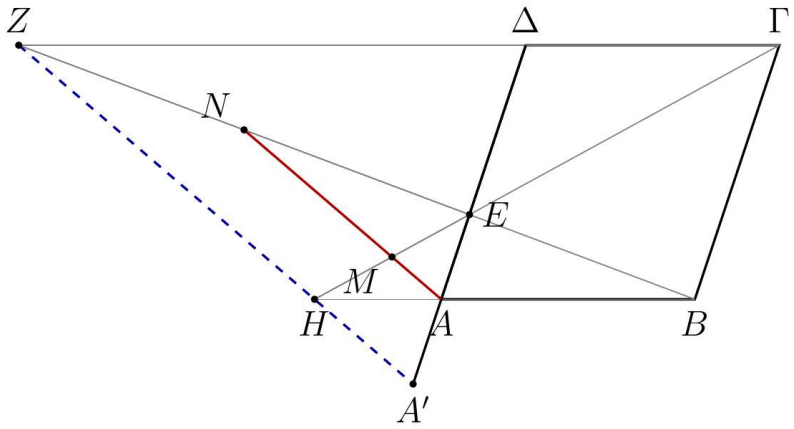
Έστω A' το συμμετρικό του E ως προς το A, δηλαδή το σημείο της προέκτασης της ΔA με $AA' = AE$. Τότε

$$A'\Delta = A'A + A\Delta = AE + 3 \cdot AE = 4 \cdot A'A.$$

Τα τρίγωνα $A'AH$ και $A'\Delta Z$ έχουν $\widehat{A'AH} = \widehat{A'\Delta Z}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AH, \Delta Z$ με τέμνουσα την $A'\Delta$) και

$$\frac{A'A}{A'\Delta} = \frac{AH}{\Delta Z} = \frac{1}{4},$$

άρα είναι όμοια. Επομένως $\widehat{AA'H} = \widehat{\Delta A'Z}$ και, αφού τα H, Z βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $A'\Delta$, οι ημιευθείες $A'H$ και $A'Z$ συμπίπτουν:
τα σημεία H, A', Z είναι συνευθειακά, με $A'Z = 4\,A'H$.



Στο τρίγωνο EHA' τα A, M είναι τα μέσα των EA', EH, άρα $AM \parallel A'H$ και $AM = \frac{1}{2} \cdot A'H$.
Στο τρίγωνο EZA' τα A, N είναι τα μέσα των EA', EZ, άρα $AN \parallel A'Z$ και $AN = \frac{1}{2} \cdot A'Z$. Οι ευθείες $A'H$ και $A'Z$ συμπίπτουν, οπότε οι AM και AN είναι παράλληλες προς την ίδια ευθεία και διέρχονται από το ίδιο σημείο A: τα A, M, N είναι συνευθειακά.